Les bâtons d'Ishango
20 000 ans de mystère

Naissance de l'algèbre
L'apport de François Viète

Double causalité
Le théorème du libre arbitre

tangente
n° 194

tangente
l'aventure mathématique

Covid-19
une approche mathématique
Puissance et limites des modèles
L'épidémiologie vue par la statistique

Le génie de John Conway
Jeu de la vie, premier automate cellulaire
Puzzles, nombres surréels, groupes finis…

DOM - LUX - BELG : 7,30 € SUISSE : 12,20 CHF CANADA : 11,99 $ CAN
TUNISIE : 7,20 DTU MAROC : 70 DH / ISSN 0987-0806 / JUIN-JUILLET 2020

Soutenez le magazine *Tangente*
Incitez vos amis à le découvrir
Nouveau : l'accès numérique intégral

Avec le soutien du CNL CENTRE NATIONAL DU LIVRE

M 05421 - 194 - F: 6,80 € - RD



VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

L'ACTUALITÉ DE TANGENTE DANS CETTE PÉRIODE DIFFICILE

TANGENTE A BESOIN DE VOTRE SOUTIEN

BAISSE DE LA VENTE EN LIBRAIRIE PENDANT LE CONFINEMENT
DÉPÔT DE BILAN DU DISTRIBUTEUR DE MAGAZINES PRESSTALIS

LA PRESSE (ET TANGENTE) EN DANGER

Chers lecteurs, chères lectrices de *Tangente*

Ces derniers mois ont été très difficiles pour de nombreux acteurs économiques.
Les éditeurs n'y ont pas échappé, avec, pour ceux qui publient des livres, deux mois complets d'interruption de leur diffusion en librairies.
Et, pour ceux qui publient des magazines, à peine la période de confinement allégée, le dépôt de bilan de Presstalis, qui assure la distribution chez les marchands de journaux.
Pour les éditeurs qui sont sur ces deux fronts, même petits comme les Éditions POLE, ce sont **plusieurs dizaines de milliers d'euros qui disparaissent**, au moins en trésorerie, peut-être même de manière définitive.
Pour nous tirer de cette série de circonstances difficiles, nous comptons sur vous.

- Nous avons besoin tout d'abord de votre fidélité. Si vous êtes abonné(e), reconduisez régulièrement cet abonnement, n'hésitez pas à choisir l'abonnement « permanent » qui vous permet de ne pas oublier de vous rébonner. Et si vous achetez notre magazine au numéro, ne manquez pas les parutions. N'hésitez pas non plus à faire des achats (en page 3 de couverture de ce numéro ou sur notre librairie en ligne **www.infinimath.com/librairie**)
- Nous avons aussi besoin de votre aide sur le plan de la communication : parlez de *Tangente* à vos amis, encouragez-les à le découvrir et à s'abonner.

Une nouveauté peut vous aider à convaincre ceux, en particulier les jeunes, qui ne jurent que par le numérique : **l'abonnement numérique intégral**. Cette nouvelle formule d'abonnement, détaillée en page 3 de couverture, permet, pour moins de 4 euros mensuels, d'avoir accès à l'intégralité des archives numériques de *Tangente* et de ses hors séries, mais aussi des problèmes de la rubrique Affaire de logique publiée dans le journal *Le Monde* par des collaborateurs de *Tangente*.

À L'AFFICHE

NOUVEAUTÉ : HORS SÉRIE 74 DE *TANGENTE*

COURBES ET TRAJECTOIRES



Les droites, les cercles, les coniques, les spirales, les hélices, et bien d'autres courbes envahissent notre quotidien. Issues d'équations paramétriques ou implicites, exprimées en coordonnées cartésiennes ou polaires, elles fascinent les amateurs de géométrie.
Leur richesse est exploitée dans de nombreux domaines. Elles permettent d'apporter des solutions à des problèmes d'astronomie ou de physique. Elles possèdent aussi une esthétique propre qui se retrouve avec bonheur dans l'art ou le design.
Une courbe peut aussi être vue comme la trajectoire d'un point dans le plan ou l'espace, une approche conduisant à de nouvelles propriétés.



Dossier |
Covid-19, une approche mathématique

11 La pandémie de Covid-19 a surpris par sa virulence mais également par la rapidité de sa propagation. De nombreuses statistiques, parfois contradictoires, ont été publiées. Les modèles mathématiques permettent d'appréhender, de comprendre, d'étudier, de prédire les phénomènes qui nous entourent. Mais quel peut être leur apport alors que tant d'inconnues subsistent ?

12 Une équation à trop d'inconnues

16 Modélisation et calculs sur le vif

20 La naissance de l'épidémiologie

24 Covid-19 : les maths à la rescousse

EN BREF : La surmortalité ➥ 5

LU, VU, ENTENDU : Autour du Covid ➥ 10

EN BREF : Statistiques et épidémiologie ➥ 19

EN BREF : Les enquêtes étiologiques ➥ 23

Dossier |
Le génie de John Conway

31 *John Horton Conway, mathématicien de génie, est décédé le 11 avril. À la fois créateur à l'imagination débordante dans de nombreux domaines – en particulier le jeu – et vulgarisateur hors pair, il incarnait le modèle idéal de mathématicien dont* Tangente *pouvait rêver. Par son talent, il a fait avancer les mathématiques dans des domaines variés : groupes finis, théorie des nombres, géométrie et topologie géométrique, physique théorique, combinatoire et théorie des jeux.*

32 Conway, le joueur mathématicien

34 Les mille et une merveilles du jeu de la vie

36 Vertigineux nombres surréels !

39 Conway et les groupes

40 Un irrésistible géomètre

42 Quand Conway marche dans les pas d'Einstein

NOTES DE LECTURE : Les livres de Conway ➥ 44

EN BREF : Les inventions de Conway ➥ 45, 46

6 Les bâtons d'Ishango enfin décryptés ?

Le premier objet mathématique date de plus de vingt mille ans. Son interprétation fait, aujourd'hui encore, toujours l'objet de débats.

28 La saga des grands moments mathématiques Naissance de l'algèbre

François Viète fait partie de ces savants célèbres pour leur apport considérable aux mathématiques.

Le distributeur de presse Presstalis a déposé le bilan (voir page ci-contre), mettant les éditeurs en grande difficulté. *Tangente* remercie les lecteurs qui se sont mobilisés.
Une façon efficace de contribuer est d'inciter ses amis à s'abonner, pourquoi pas au nouvel « abonnement numérique intégral » (voir en troisième de couverture).

COURRIER DES LECTEURS ➥ 2
NOTES DE LECTURE ➥ 10, 50
NOUVELLE ➥ 27
RÉCRÉMATH ➥ 47
PROBLÈMES ➥ 48
SOLUTIONS ➥ 51

courrier des lecteurs

par Michel Criton et Édouard Thomas

La dialectique du polynôme

En cette période, nombreux sont nos lecteurs à s'être plongés avec assiduité dans les rubriques des Problèmes des derniers numéros ! Retour sur quelques-unes de vos propositions astucieuses et de vos remarques.

Le Problème 19311 (voir *Tangente* 193, page 49) s'énonçait ainsi.

Un professeur propose à ses élèves de trouver la racine entière r d'un polynôme P à coefficients entiers. À tour de rôle, les élèves proposent un nombre a, et le professeur annonce la valeur de P(a) et la position de a par rapport à la racine entière. Julien propose 7 ; le professeur lui répond : « *P(7) = 77, et la racine est supérieure à 7.* »

Bernard : « ... » (inaudible du reste de la classe, mais supérieur à 7). Le professeur affirme que « *P(...) = 85, et la racine est supérieure au nombre proposé* ». Quelle est alors la valeur de r ?

Robert Cabane trouve bien que si un tel polynôme existe, alors $r = 14$ et le nombre a énoncé par Bernard vaut 9, d'où $P(14) = 0$, $P(7) = 77$ et $P(9) = 85$. Notre lecteur se propose ensuite de chercher de tels polynômes, voire de les trouver tous.

Dans une première solution, il effectue une translation de la variable en posant $Q(x) = P(x + 9) - 85$, le problème initial se ramenant aux conditions $Q(0) = 0$, $Q(-2) = -8$ et $Q(5) = -85$.

Les deux premières égalités suggèrent de comparer $Q(x)$ à $4x$ en posant $T(x) = 4x - Q(x)$, ce qui donne $T(0) = 0$, $T(-2) = 0$, $T(5) = 105$. Le polynôme T est alors de la forme $T(x) = (x^2 + 2x)\,U(x)$, où U est un polynôme à coefficients entiers.

En raisonnant sur la division euclidienne des polynômes, on obtient $U(5) = 3$, d'où $U(x) = 3 + (x - 5)\,V(x)$, V étant lui-même un polynôme à coefficients entiers.

On aboutit finalement à $P(x) = -3x^2 + 52x - 140 + (x - 7)(x - 9)(x - 14)W(x)$, où W désigne un polynôme quelconque à coefficients entiers.

Dans une seconde solution, notre lecteur considère le cas où il existerait deux polynômes P_1 et P_2 solutions du problème. Le polynôme D défini par $D(x) = P_1(x) - P_2(x)$ vérifierait $D(7) = D(9) = D(14) = 0$, et on aurait alors $D(x) = (x - 7)(x - 9)(x - 14)\,W(x)$, où W est un polynôme quelconque à coefficients entiers.

Réciproquement, si un polynôme P est solution, alors le polynôme défini par $P(x) + (x - 7)(x - 9)(x - 14)W(x)$ est également solution.

Le fait d'avoir trois conditions nous aiguille vers un polynôme de degré 2, de la forme $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On obtient un système de trois équations à trois inconnues (les trois coefficients), qui aboutit à la même expression qu'avec la première méthode.

Est-ce bien rationnel ?

Le problème 19307, toujours à la page 49 de *Tangente* 193, demandait si l'équation $x^2 + xy + y^2 = 2$ admet comme solution des couples (x, y) de nombres rationnels. L'un de nos lecteurs, Patrick David, nous a proposé une solution très élégante, inspirée de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Si x et y sont rationnels, on peut alors trouver trois entiers a, b et d non tous pairs tels que $x = a / d$ et $y = b / d$.

On a donc $a^2 + ab + b^2 = 2d^2$.

Les entiers a et b sont tous deux pairs, sinon le premier membre serait impair. Posons ainsi $a = 2a'$ et $b = 2b'$. On a alors $2a'^2 + 2a'b' + 2b'^2 = d^2$, et donc d est aussi pair, d'où une contradiction !

73 : le mystère persiste !

Le nombre 73 possède une étrange propriété. Prenez l'un de ses multiples, par exemple $73 \times 256 = 18\,834$, que l'on écrit 188 | 34 à l'aide d'un séparateur. La somme $188^2 + 34^2$ des carrés des deux termes est elle-même un multiple de 73.

Le Problème 18605 (voir *Tangente* 186, page 48) consistait à trouver le nombre de trois chiffres vérifiant cette même propriété.

La solution proposée (en page 51) commence ainsi. Si a et b sont les deux tranches d'un entier N multiple du nombre n cherché, alors $100a + b$ est multiple de n. Suivent quelques égalités arithmétiques, desquelles émerge la solution cherchée, 137. Un lecteur s'interroge : « *Pourquoi multiplie-t-on par 200a à un moment donné ? Cela reste un mystère pour moi...* »

On multiplie par $200a$ de façon à obtenir, par différence entre deux égalités obtenues précédemment, l'expression $10\,000a^2 - b^2$, qui est multiple du nombre n cherché. Le calcul, quelque peu technique, semble effectivement sortir d'un chapeau, le problème ayant été construit « sur mesure » à partir des propriétés du nombre $10\,001 = 73 \times 137$.

Chiffres en salade **de Fernando Costa.**



© É. Thomas (Biarritz, crypte Sainte-Eugénie, 2015)

tangente
l'aventure mathématique

Choisissez votre abonnement :
PLUS avec les HS « kiosque »
SUPERPLUS avec la Bibliothèque Tangente

Pour mieux comprendre le monde, tous les deux mois

Politique, économie, finance, jeux, musique, littérature, arts plastiques, architecture, informatique, physique, biologie, géographie… Les mathématiques sont partout !!! Le magazine *Tangente* et ses hors séries vous aident à redécouvrir notre quotidien.

La version numérique pour tous

Il est possible de consulter en ligne sans limitation de durée les numéros et hors séries de *Tangente* sur le site **tangente-mag.com** pour ceux qui prennent une des formules d'abonnement papier + numérique ou ont choisi l'abonnement numérique seul (dont la formula va changer). Un véritable site interactif et pas un simple PDF.

• • • • • Tangente Éducation

Trimestriel qui, pour un coût symbolique, traite de thèmes pédagogiques variés, donne des outils aux enseignants **et permet l'accès à de nombreuses ressources Internet.**
Nouvelle version numérique interactive !
Indispensable dans les CDI de collèges et lycées !



Les hors séries « kiosque » • • • •

4 fois par an, les hors série (format « kiosque »), **64 pages à partir de 2020**, explorent un dossier de savoir ou de culture. **Derniers numéros parus** :
Les nombres complexes - Maths et économie - Découpages et pavages - Espaces vectoriels - De la 2D à la 3D - Maths et développement durable - Intelligence artificielle - Maths et physique (1) - Surfaces - Maths et physique moderne (2) - Maximum, minimum, optimum - Emploi et maths - Courbes et trajectoires.

Ils sont disponibles :
- sur **www.infinimath.com/librairie**
- chez votre marchand de journaux (le dernier)
- **avec l'abonnement PLUS ou SOUTIEN.**

Les hors séries « Bibliothèque » • • • •

Pour nos lecteurs les plus curieux, les articles des hors séries de *Tangente* sont repris et complétés dans les livres de la Bibliothèque Tangente, magnifiques ouvrages de 160 pages (prix unitaire 22,00 €), richement illustrés. Ils sont disponibles :
- sur la librairie du site **www.infinimath.com**
- chez votre libraire
- **en souscription avantageuse avec l'abonnement SUPERPLUS ou SOUTIEN.**

Choisissez l'abonnement permanent
Vous êtes débité tous les 6 mois de la moitié de l'abonnement annuel (par prélèvement ou par CB si vous payez en ligne) en arrêtant quand vous voulez.

NOUVEAU ! L'ABONNEMENT NUMÉRIQUE INTÉGRAL pour 3,99 € par mois

Bulletin d'abonnement à retourner à : Espace Tangente – 2 rue de la Prée – 27170 COMBON

Vous pouvez aussi vous abonner ou réabonner sur Internet à l'adresse **https://infinimath.com/librairie**

NOM* .... PRÉNOM* ....
ADRESSE* ....
CODE POSTAL* .... VILLE* .... PAYS* ....
MAIL* .... MOBILE ....

codif : TG194

Abonnements à *Tangente* - Tarif annuel Cochez la durée choisie ci-dessous ■ 1 an - 2 ans ■ ■ Prélèvement 50% tous les 6 mois	Papier + Numérique		Numérique seul
	France	Supplément hors métropole	
ABO TG PLUS (6 n^{os} + 4 HS par an)	☐ 68 €	☐ +24 €	☐ 42 €
ABO TG SUPERPLUS (par an, 6 n^{os} + 4 livres Bibliothèque) + 4 HS numérique	☐ 102 €	☐ +30 €	
ABO SOUTIEN : 6 n^{os} de *Tangente* + 4 HS « kiosque » + 4 « Bibliothèque » + 4 n^{os} de *Tangente Éducation*.	☐ 138 €	☐ +40 €	
TANGENTE ÉDUCATION (4 n^{os}/an) Tarif non abonnés à *Tangente* Tarif abonnés à *Tangente*	☐ 14 € ☐ 10 €	☐ +4 € ☐ +4 €	☐ 7 € ☐ 5 €
ABO NUMÉRIQUE INTÉGRAL Accès aux archives de *Tangente*, *Tangente* HS, *Tangente Éducation*, Affaire de Logique	■ Supplément pour les abonnés à *Tangente* : 4 € tous les 6 mois (prélèvement)		■ Non abonné à TG 3,99 € par mois

MONTANT DE L'ABONNEMENT : €

REPORT DU VERSO : €

MONTANT TOTAL : €

MON MODE DE PAIEMENT :
☐ Chèque (ordre Éditions POLE, uniquement payable en France)
☐ Bon de commande administratif
☐ Prélèvement (tous les 6 mois, sauf numérique intégral, tous les mois).

Je recevrai mon mandat SEPA par mail et le renverrai signé
IBAN :
BIC :

☐ Carte bancaire numéro Date d'expiration /
Cryptogramme
DATE : SIGNATURE :

BON DE COMMANDE

À retourner à Éditions POLE - Espace Tangente - 2 rue de la Prée - 27170 COMBON

Les ouvrages récents ou en promotion sont repérés en rouge

HS : BIBLIOTHÈQUE TANGENTE

18€/*19,80€/**22€

La plus belle bibliothèque au monde de culture mathématique.

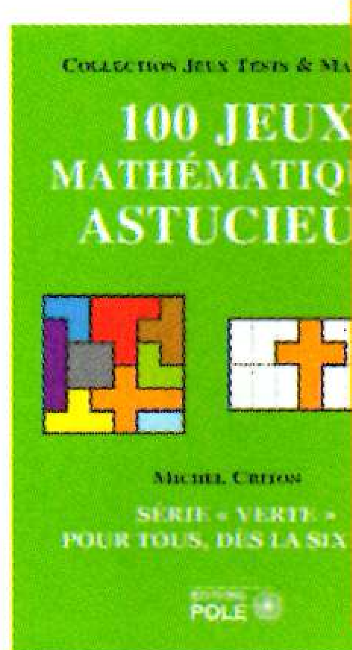


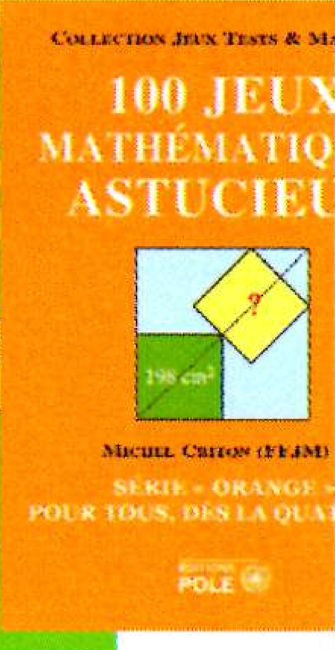


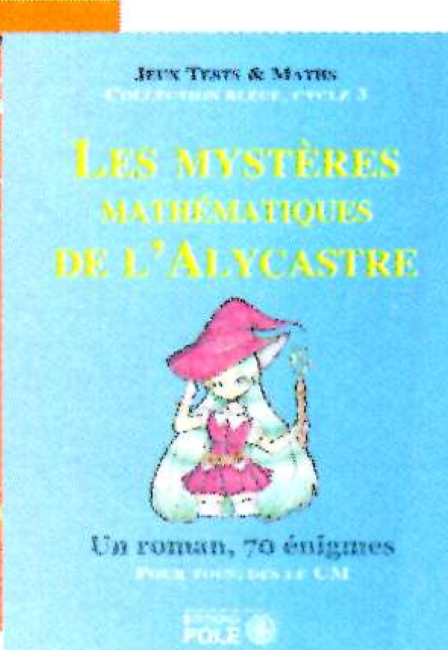
- 1 000 ans d'histoire des maths (n°10) ☐
- *Maths et musique (2nde édition, n°11) ☐
- L'infini (n°13) ☐
- Hasard et probabilités (n°17) ☐
- **Les fractales (n°18) Édition 2019 ☐
- **Jeux mathématiques (n°20)** ☐
- **Astronomie (n°21)** ☐
- *Équations algébriques (2nde édition, n°22) ☐
- **Maths et arts plastiques (n°23) 2e édition ☐
- Le triangle (n°24) ☐
- **Grands mathématiciens modernes (n°25)** ☐
- *Cryptographie et codes (2nde édition, n°26) ☐
- Mathématiques et littérature (n°28) ☐
- Euler (n°29) ☐
- * Histoire des maths, de l'Antiquité à l'an Mil (n°30) ☐
- **Maths et finance (n°32) Édition 2019 ☐
- **Les nombres (n°33) Édition 2019 ☐
- Les transformations (n°35) ☐
- *Le cercle, la perfection faite courbe (n°36) ☐
- *Les algorithmes (2nde édition, n°37) ☐
- **Maths et philosophie (n°38) Édition 2019 ☐
- *Maths discrètes et combinatoire (n°39) ☐
- *Mathématiques et géographie (n°40) ☐
- *Suites et séries (n°41) ☐
- *Mathématiques et biologie (n°42) ☐
- *Mathématiques et chimie (n°43) ☐
- *Les matrices (n°44) ☐
- *Mathématiques et politique (n°45) ☐
- *Théorie des jeux (n°46) ☐
- ***La magie des invariants (n°47)** ☐
- *Les ambassadeurs des maths (n°48) ☐
- *Les mathématiques de l'impossible (n°49) ☐
- *L'intégrale (n°50) ☐
- *Maths, de l'esthétique à l'éthique (n°51) ☐
- *Mathématiques et informatique (n°52) ☐
- *Les angles (n°53) ☐
- *Les graphes (n°54) ☐
- *Les démonstrations (n°55) ☐
- *Les fonctions (n°56) ☐
- *Les maths des assurances (n°57) ☐
- **Mathématiques et médecine (n°58) ☐
- **La droite (n°59) ☐
- **Mathématiques et architecture (n°60) ☐
- **Les ensembles (n°61) ☐
- **Maths et économie (n°62) ☐
- **Les complexes (n°63) ☐
- **Découpages et pavages (n°64) ☐
- **Vecteurs, espaces vectoriels (n°65) ☐
- **Les secrets des dimensions (n°66) ☐
- **Maths du développement durable (n°67) ☐
- **Intelligence artificielle (n°68) ☐
- **Mathématiques et physique (1) (n°69) ☐
- **Les surfaces (n°70) ☐

LIVRES DE JEUX MATHÉMATIQUES

8 € l'unité sauf indication contraire. À partir de :
*12/13 ans - **14/15 ans - ***lycéens et adultes

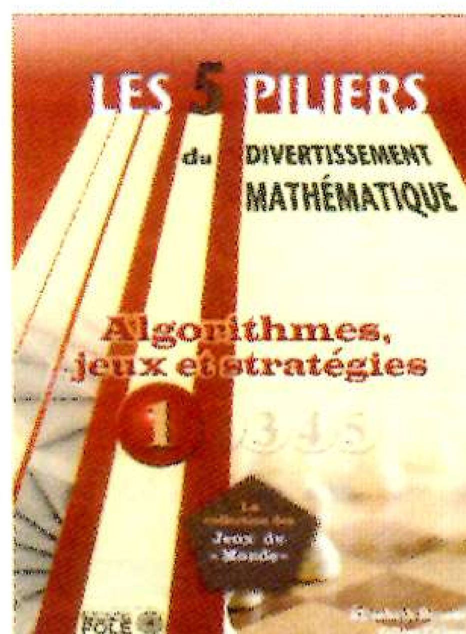


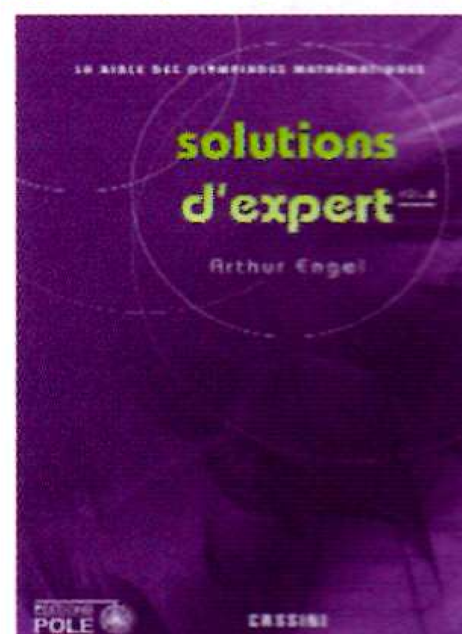




NOUVEAUTÉS

- *100 jeux math. astucieux série verte 10 € ☐
- **100 jeux astucieux série orange 10 € ☐
- *Les mystères de l'Alycastre série bleue 10 € ☐
- *L'aiguille à remonter le temps (série verte) ☐
- **52 nouvelles énigmes pour tous ☐
- **7×7 énigmes mathématiques pour tous ☐
- **L'angle mystérieux et autres jeux pour tous ☐
- **Logimath 1+ 2 9€ ☐
- **Énigmes de maths à 3 vitesses 7,75€ ☐
- ***La roue exploratrice et autres jeux (lycée) ☐
- ***52 nouvelles énigmes pour lycéens et + ☐
- ***7 × 7 énigmes et défis pour lycéens et + ☐
- ***Énigmes mathématiques de Lewis Carroll (-10%) 9€ ☐
- ***Les déductions du professeur Pythaclide (BD) -10% 9€ ☐
- ***Œdipeland, la planète à énigmes (BD jeux logiques) -10% 9€ ☐
- **Panoramath 4 (pour tous) : – 50%** 4€ ☐
- Concours australien (pour tous) 11€ ☐
- 100 et + jeux math. culturels (TE 20, pour tous) 10€ ☐
- *****Double détente** 14,50€ ☐
- *****121 Rapidos et autres jeux** (-5%) 17€ ☐





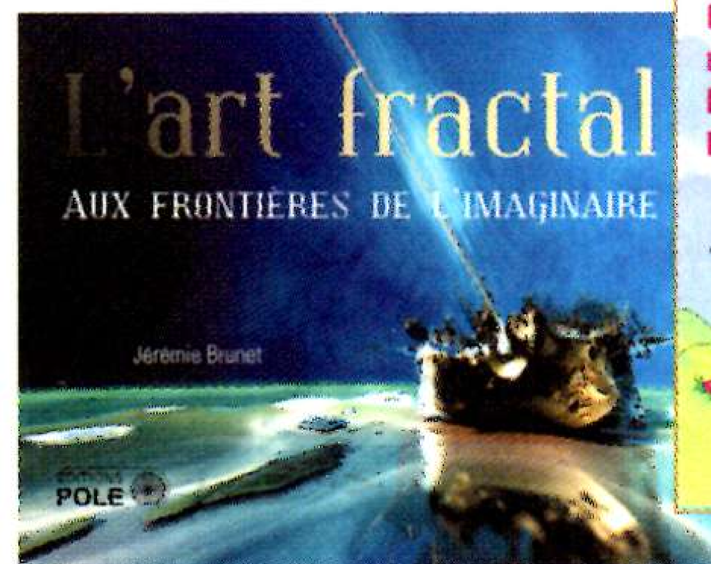
La « bible » du « problem solving », par Arthur Engel :

- ***Solutions d'expert, vol. 1 : 25€ ☐
- ***Solutions d'expert, vol. 2 25€ ☐
- *****Solutions d'expert vol 1 & 2 + Concours australien OFFERT** 50€ ☐

Les jeux mathématiques du « Monde »

- *** L'Intégrale (1 à 500) 35€ ☐
- ***Jeux du « Monde » Volume 3 (201-300) 18€ ☐
- ***Jeux du « Monde » Volume 4 (301-500) 18€ ☐
- *****Jeux du « Monde » Volumes 3 + 4** 35€ ☐
- *****Algorithmes, jeux et stratégies** 16,50€ ☐

BEAUX LIVRES





- **L'art fractal de Jérémie Brunet Aux frontières de l'imaginaire** 32,00 € ☐
- ***Lunelotte et la réciproque (BD) 12,00 € ☐

COLLECTION TANGENTE ÉDUCATION

- Informatique débranchée 10,00 € ☐
- Les mathématiques du bridge 19,80 € ☐
- **Pliages, découpages et magie** 16,50 € ☐
- 16 activités TICE pour le lycée 6,00 € ☐
- 100 et quelques jeux maths culturels 10,00 € ☐
- Le Testament de Newton à l'unité 4,50 € ☐

JEUX ET CURIOSITÉS

- Le jeu de tarot (+ accès site) 16,00€ ☐
- Les secrets du Rubik's Cube 19,80€ ☐
- 30 paradoxes renversants ! 9,00€ ☐
- Énigmes POLICIÈRES 6,00€ ☐
- HS LR Énigmes policières 5,50€ ☐
- HS LR Testez votre intelligence 5,50€ ☐
- HS LR Jeux de cartes, poker, magie 5,50€ ☐
- 80 additions mystères 7,75€ ☐
- 40 jeux littéraires (-10%) **Faciles** : 7,00€ ☐
- ☐ **Pour tous** : 7,00€ **Pour amateurs** : 7,00€ ☐

JEUX DE LOGIQUE

- **SUDOKU de compétition** 9,90€ ☐
- **Les secrets du Sudoku** 9,00€ ☐
- **Mon premier Sudoku (dès 3 ans)** 10,00€ ☐
- **Coralie jouer au Sudoku (dès 5 ans)** 10,00€ ☐
- Jeux de logique et SYMÉTRIE 4,90€ ☐
- Jeux de MENTEURS 6,00€ ☐
- Hitori 9,00€ ☐
- 5 jeux de circuits 7,75€ ☐
- 5 jeux de déduction avec lettres 7,75€ ☐
- 5 jeux de chiffres 7,75€ ☐
- Jeux des 5 continents 7,75€ ☐
- Le jeu du gratte-ciel 7,75€ ☐
- Le jeu du démineur 7,75€ ☐
- Dominos à placer 7,75€ ☐
- Bataille navale 7,75€ ☐
- Testez votre RAPIDITÉ 4,90€ ☐
- Testez votre sens de l'organisation 4,90€ ☐
- MARIAGES LUDIQUES pour tous 4,90€ ☐
- ANTI-TESTS 4,90€ ☐
- Testez votre IMAGINATION 6,00€ ☐
- Jeux de logique SUR LA PLAGE 6,00€ ☐
- Tests de logique et jeux de société 6,00€ ☐

ANCIENS NUMÉROS

Prix des anciens numéros				
Indiquez les numéros souhaités dans cette colonne	1 à 4	5 à 10	11 à 15	au-delà
MAGAZINE OU HS				
Tangente :	☐ 6,40 €	☐ 5,20 €	☐ 4,80 €	☐ 4,50 €
Tangente HS «kiosque» :	☐ 6,50 €	☐ 5,20 €	☐ 4,80 €	☐ 4,50 €
Tangente ÉDUCATION :	☐ 3,50 €	☐ 2,80 €	☐ 2,60 €	☐ 2,45 €

Forfait port :	1 livre ou nos	2 livres ou +
France	☐ 4,50 €	☐ 6,00 €
gratuit si commande d'1 ou plusieurs livres en vert gras		
Hors métropole	☐ 6,00 €	☐ 10,00 €
Total à reporter au verso		€

Commandez aussi en ligne sur le site www.infinimath.com/librairie

Téléchargez le catalogue POLE sur www.infinimath.com/catalogue.pdf

par J. Bair, M. Brilleaud, B. Hauchecorne et D. Justens

Le « 9-3 », terre de Covid ou mauvais calculs ?

Une donnée fournie par l'Institut national de la statistique et des études économiques (Insee) et relayée par les media a donné une vision cataclysmique de la santé en Seine-Saint-Denis (93). On annonce dans un récent article du quotidien *Le Monde* un excès de mortalité de 63 % par rapport à la même semaine de l'année précédente.
Surprise, dans le même article, on lit qu'entre le 1er mars et le 2 avril le Val-de-Marne a connu une mortalité due au Covid supérieure à son voisin de Seine-Saint-Denis pour une population inférieure. Plus généralement, d'autres sources nous informent que le nombre de décès dus à cette maladie pour cent mille habitants, comme celui des hospitalisations, y sont inférieurs à ceux des autres départements de la petite couronne, Paris compris. Cherchez l'erreur !
Un coup d'œil sur le taux de mortalité du 93 nous apprend qu'en 2019 il fut de 5,4 ‰, soit le plus bas de France, qui affiche un taux moyen de 9,2 ‰. Ainsi, un excès de 63 % induit un nombre absolu de décès inférieur à un excès de 30 % pour un taux de mortalité de 12 ‰.

HOSPITALISATIONS PAR DÉPARTEMENT
pour 100 000 habitants



de 100 à 177
de 50 à 100

© Le Monde, jeudi 30 avril 2020.

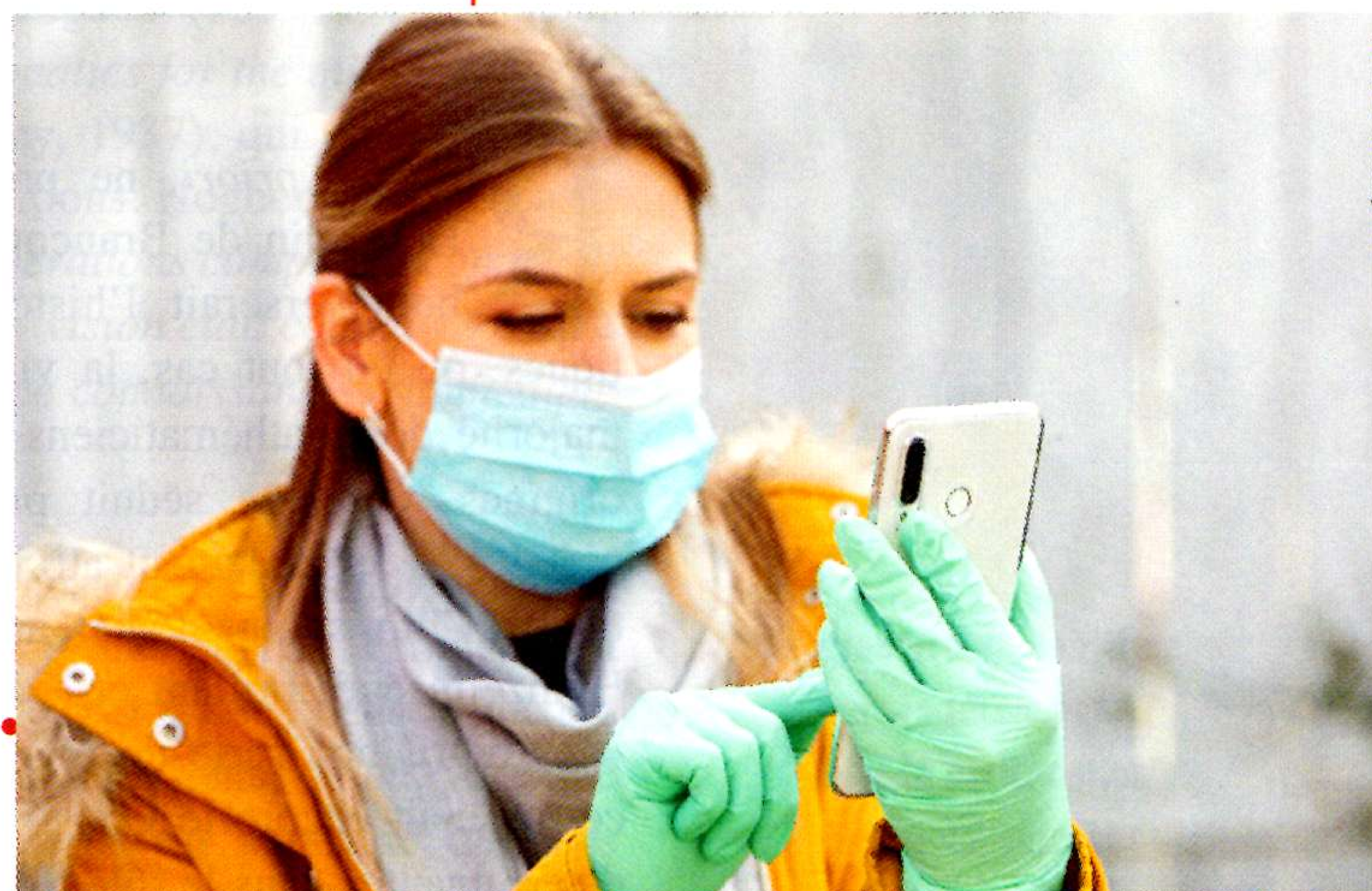
Seine-Saint Denis : surmortalité plus forte, mortalité plus faible.

Ces remarques ne cherchent pas à prouver que « tout va bien » en Seine-Saint-Denis, mais à montrer que l'engouement à trouver que « tout va mal » dans ce département tient avant tout à du misérabilisme dont ses habitants se passeraient volontiers. Pour juger d'une surmortalité inquiétante par rapport à la moyenne, il faudrait réaliser une étude plus fine, qui engloberait une analyse des décès par classe d'âge, et en tirer des conséquences utiles pour réaménager la politique de santé territoriale.

Un projet Polymath sur le coronavirus

Des chercheurs en mathématiques appliquées de l'Université de Californie à Los Angeles (UCLA), en particulier Terence Tao et Christopher Strohmeier, ont proposé un projet ouvert de mathématiques collaboratives « Polymath » (voir *Tangente* 132, 2010 et *Tangente* 183, 2018) dédié à la pandémie de Covid-19. Il s'agit de construire collectivement une base de données scientifiquement exploitables. Un Wiki synthétise les données selon les régions du monde, les pistes de réflexion, les analyses, les références disponibles.
Il est en effet indispensable de disposer de données fiables pour comprendre et prévenir la propagation du virus et développer des traitements efficaces. Le projet Polymath, « Clearinghouse for crowdsourcing Covid-19 data and data cleaning requests », propose une nouvelle collecte de données avec les objectifs suivants : récolter des données précises, en grand nombre et pertinentes ; mettre à disposition de tous les bases de données, accompagnées d'un descriptif des traitements effectués ; comparer les bases de données et analyses déjà réalisées.





© 123RF / oleskaymark

Un protocole nommé Robert

Le problème que posent les sujets asymptomatiques, qui sont les plus à même de transmettre le virus, est un enjeu majeur dans la lutte contre la propagation de l'épidémie. Sur un plan humain, la question de savoir si l'on est contagieux va influer sur le comportement (sur une décision de visite à des proches en Ehpad ou à la maternité, par exemple).

L'application développée actuellement par Inria et plusieurs partenaires européens a pour objectif l'assistance à la détection des personnes potentiellement infectées sans le savoir. Le principe ? Votre téléphone cellulaire est associé à un jeu de crypto-identifiants (qui changent toutes les 15 mn). À chaque fois qu'il croise d'assez près un autre téléphone, ce dernier, s'il a activé l'application, récupère votre crypto-identifiant du moment et vous transmet le sien. Ces paires d'identifiants qui définissent un contact sont envoyées chaque jour à un serveur. Si quelqu'un est testé positif et qu'il le signale à l'application, le serveur récupère tous les identifiants de ses contacts. Tous les téléphones associés reçoivent alors une alerte avec un indice de contamination probable. Sans que quiconque connaisse l'identité du porteur de virus, le lieu ou la date de la rencontre. Ces informations ne sont d'ailleurs pas connues, le protocole utilisé se basant uniquement sur des échanges Bluetooth entre appareils. Plus de détails sur **www.inria.fr**

par Daniel Justens

Les bâtons d'Ishango enfin décryptés ?

Le premier objet mathématique date de plus de vingt mille ans. Il fut découvert par hasard en plein centre de l'Afrique par un géologue belge. Son interprétation fait, aujourd'hui encore, toujours l'objet de débats.

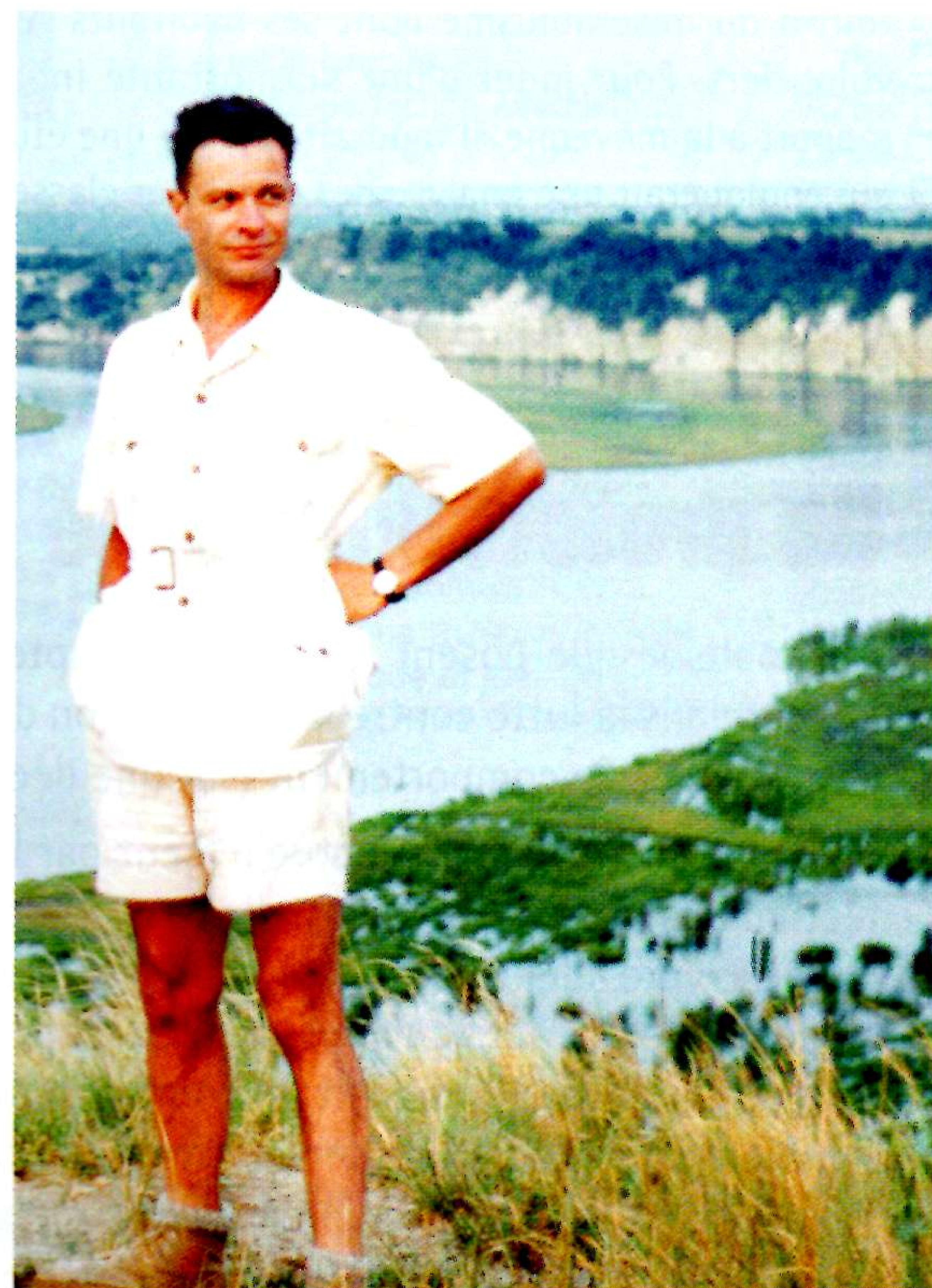


Rien, *a priori*, ne prédisposait Jean de Heinzelin de Braucourt à être celui qui bouleverserait l'histoire des mathématiques, ou en tout cas, la vision que la grande majorité des mathématiciens se faisaient de ses origines. Quoique séduit par les sciences, il n'était pas spécialement attiré par les mathématiques. Chimiste, géologue, archéologue, Jean de Heinzelin était brillant et éclectique. Dès 1947, il entreprit une série de missions dans l'Est de ce qui était encore le Congo belge. Elles seront déterminantes dans le rôle que le savant va jouer dans notre connaissance de l'histoire des mathématiques.

+ La découverte

Entre 1935 et 1938, l'hydrobiologiste liégeois Hubert Damas (1910–1964) avait découvert, au Congo belge, le long du lac Édouard, une série d'artefacts primitifs hétéroclites qui n'avaient pas fait l'objet d'une étude particulière et qui posaient questions. Il s'agissait d'approfondir la découverte. Le directeur de l'Institut de sciences naturelles d'alors, Victor Van Straelen, vit en Jean de Heinzelin l'homme de la situation. Les missions qu'il avait remplies au Kivu, dans l'Est du Congo, en faisaient une personne de référence incontournable dans cette région d'Afrique. À cela s'ajoutaient ses compétences en géologie, en chimie, et sa passion pour l'archéologie. En 1950, Jean de Heinzelin est donc envoyé officiellement en mission de géologie historique auprès de l'Institut national pour l'étude agronomique du Congo belge, à Yangambi. C'est pendant cette première mission que le géologue fait une découverte essentielle près du petit village d'Ishango, le long de la rivière Semliki, au Nord du lac Édouard, au voisinage de la frontière ougandaise. Il s'agit d'un petit os entaillé de multiples encoches. Ce premier « bâton d'Ishango » fera couler beaucoup d'encre et n'a peut-être pas encore livré tous ses secrets.

Le géologue belge Jean de Heinzelin de Braucourt (1920–1998).



Jean de Heinzelin fait connaître le bâton d'Ishango au grand public en publiant sa découverte dans le magazine *Scientific American* en 1962. La publication ne fait pas grand bruit. Les mathématiciens n'en sont pas émus, à tel point que l'on peut imaginer que l'information ne leur parvient pas. Le mérite d'avoir fait découvrir l'os extraordinaire aux mathématiciens est à mettre au crédit de la mathématicienne américaine Claudia Zaslavsky (1917–2006).
L'os d'Ishango est un objet remarquable en lui-même. Il mesure environ dix centimètres de long. À son extrémité est fixé un petit quartz. Il peut s'agir d'un outil d'écriture ou de gravure, une sorte de crayon préhistorique. On ne sait toujours pas de quel animal il provient !

+ Un os plein de nombres

L'os est un petit objet intrigant qui présente trois séries d'encoches disposées le long de son axe longitudinal. Dans chaque colonne, les encoches se présentent parallèlement et sont subdivisées en groupes clairement distincts. Les nombres d'encoches éveillent notre curiosité. La colonne de gauche (notée G par les spécialistes) présente des encoches en nombres 11, 13, 17 et 19. On a là les quatre nombres premiers compris entre 10 et 20 ! Se peut-il qu'il s'agisse d'un hasard ? Ou nos ancêtres lointains connaissaient-ils déjà la notion de nombre premier ? La colonne de droite (notée D) n'est pas moins intéressante : elle présente des encoches en nombres 11, 21, 19, 9, soit 10 et 20 plus ou moins 1.

11	3 6	11
13	4 8	21
17	10 (9+1 ?)	19
19	5 (1+4 ?) 5 7	9

Effectuons à présent les sommes des nombres d'encoches des colonnes G et D. Les deux sommes donnent 60. Or, le nombre 60 est la base de calcul de la civilisation mésopotamienne, qui a laissé bien des traces dans nos systèmes de mesures actuels mais qui apparaîtra des millénaires après la civilisation d'Ishango. Plusieurs millénaires avant notre ère, les Mésopotamiens effectuaient des calculs élaborés avec une grande précision. On leur doit par exemple une approximation du nombre $\sqrt{2}$ calculée avec dix décimales exactes. Au Moyen Âge, notre système absurde, hérité des chiffres romains, en était bien incapable ! C'est que le nombre 60 a des propriétés bien agréables en tant que base d'un système de comptage. Il permet d'effectuer des divisions par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20… sans grandes difficultés, alors que notre système décimal (parce que nous avons dix doigts) ne nous permet même pas de diviser sans reste par 3. Le nombre 7 est le plus petit entier par lequel il n'est pas possible de diviser de manière exacte en base 60. Voilà qui explique le statut particulier de ce nombre, qui quantifie les jours de la semaine, les merveilles du monde et les nains de Blanche-Neige !

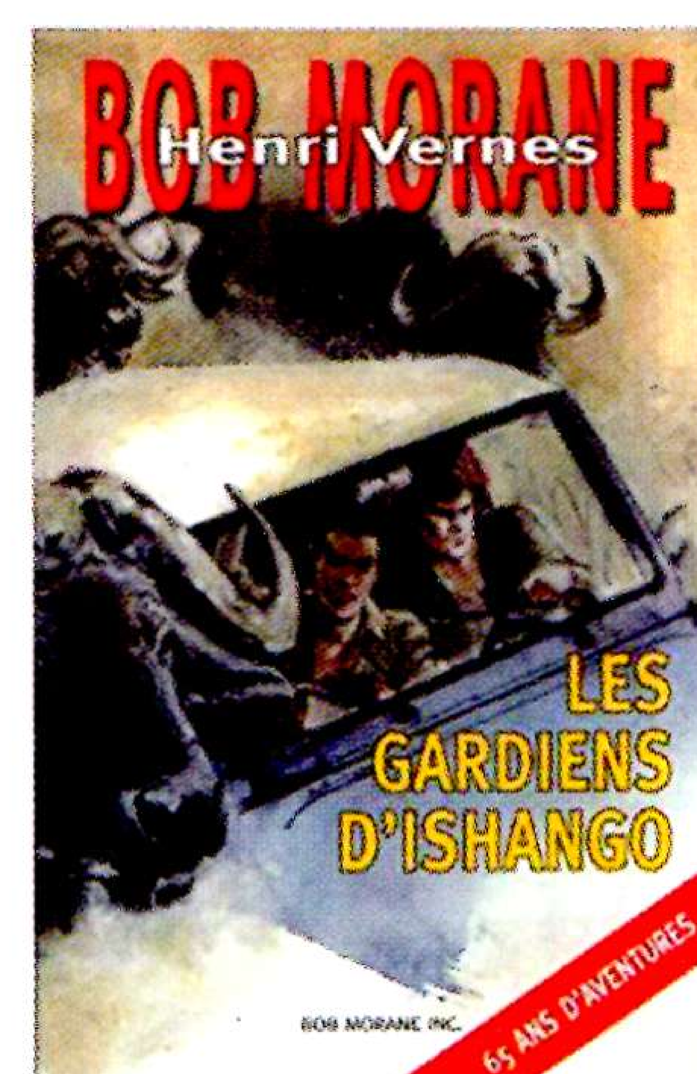
La colonne centrale de l'os d'Ishango (notée M) est plus délicate à interpréter. Elle contient les nombres 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5 et 7. La somme en vaut 48. Pourrait-on en déduire un système de calculs en base 12 ? Les sommes (60) des deux autres colonnes peuvent-elles être vues comme des multiples « 5 fois 12 » ? C'est à voir. Mais la publication et la diffusion des encoches de l'os commencent à intéresser certains mathématiciens ou amoureux des maths, comme le généticien Lancelot Thomas Hogben (1895–1975), auteur de l'ouvrage *Mathematics for the millions* (W.W. Norton & Compagny, 1937), qui connaîtra plusieurs dizaines d'éditions. Hogben n'hésite pas à affirmer que *« les opérations complexes comme la multiplication et la division était connues »* et que *« l'os témoigne d'une connaissance arithmétique avancée »*.

Quelques années plus tard, le mathématicien belge Paul Libois, professeur de géométrie à l'Université libre de Bruxelles, pense que cet os est la preuve de l'existence d'un véritable jeu arithmétique. Libois est persuadé que nos ancêtres ont dompté la notion de nombre. Il défendait l'idée que *« les premiers hommes ont perçu les propriétés des nombres en manipulant des petits tas de cailloux, d'osselets ou de fèves, de graines ou de noyaux »*. Cette hypothèse sera confirmée par la suite et d'autres découvertes d'artefacts apporteront la preuve de l'existence du brassage et de l'utilisation de différentes bases de calcul en Afrique : 6, 10, 12 et 60. On observe aussi l'utilisation généralisée, dans toute l'Afrique, de la division et de la multiplication par 2, dont on retrouve la trace sur l'os d'Ishango sous la forme des suites 3, 6, 4, 8, 10, 5, représentées sur la colonne « M » du milieu.



Paul Libois (1901–1990).

Une aventure de Bob Morane écrite récemment avec la participation de Daniel Justens.



Cela ne doit pas nous surprendre. Jusqu'à la fin du Moyen Âge, ces deux opérations étaient encore enseignées dans toutes les universités d'Europe. On parlait alors de *duplication* (multiplication par deux) et de *médiation* (division par 2) et toutes les autres opérations s'obtenaient à partir de combinaisons, plus ou moins sophistiquées, de ces deux opérations plus élémentaires. Avec des chiffres romains, il est impossible de faire beaucoup mieux !

+ Pas un calendrier

Une étude plus approfondie de l'os est aussi effectuée par l'archéologue américain autodidacte Alexander Marshack (1918–2004), qui décide de prendre en compte non seulement le nombre d'encoches, mais également leurs différences de formes et de longueur. Les conclusions et interprétations qu'il en tire en en faisant un indicateur de phases lunaires sont, hélas, plus que douteuses. En réalité, l'os d'Ishango n'est pas un calendrier. Il n'en demeure pas moins l'objet mathématique le plus ancien connu à ce jour !

La datation de l'objet est facilitée par un véritable drame que vécurent ses utilisateurs. À Ishango, le microclimat est d'une étonnante stabilité, sans saison. Mais une catastrophe a profondément modifié le cours tranquille des évènements il y a plusieurs milliers d'années : une formidable éruption dans le Katwe-Kikorongo, un champ volcanique de l'Ouganda, situé quelques kilomètres plus à l'Est à peine. Cette éruption projeta une couche épaisse d'un mètre de cendres et de tuf sur le site.

Jean de Heinzelin était géologue. Il se sentait parfaitement compétent en matière de chronologie stratigraphique. Mais, curieusement, cette méthode ne donna pas d'excellents résultats, datant l'ossement d'environ 8000 ans avant notre ère, alors que la datation au carbone 14 des différents coquillages provenant de la même strate que l'os affichait entre – 21000 et – 23000 ans ! Le géologue n'a jamais accepté les conclusions de ces processus de datation, au grand dam du reste de la communauté scientifique. Pourtant ces conclusions n'ont rien d'étonnant ! D'autres sites africains ont livré des artefacts élaborés beaucoup plus anciens, comme certains harpons dentelés datés de plus de quatre-vingt-dix-mille ans, alors que les harpons européens les plus anciens n'apparaissent « que » cinquante mille ans plus tard. L'hypothèse d'une civilisation africaine développée et très ancienne est donc validée par nombre d'observations.

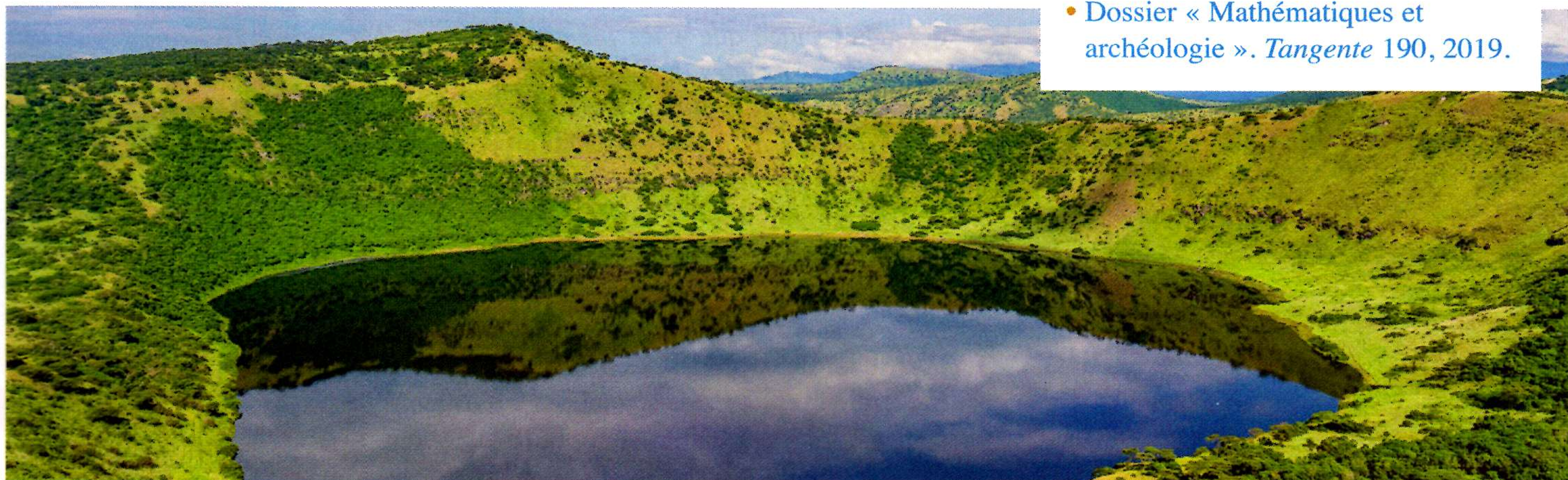
Jean de Heinzelin mourut en 1998. Peu avant sa mort, il révéla l'existence d'un second os, qui avait été conservé pendant plus de quarante ans dans l'un de ses tiroirs. Il en préparait la publication quand la maladie l'a terrassé. Ce deuxième os fut probablement découvert lors d'une mission de fouille ultérieure, sans doute vers la fin des années 1950, à un niveau très proche du premier, ce qui permet de les supposer contemporains ou presque. Il comporte cette fois six rangées d'entailles, certaines courtes, d'autres plus longues. Cette fois, plus question de nombres premiers ou encore moins de phases lunaires ! Les conclusions ébauchées par le géologue dans les notes préparatoires à sa nouvelle publication sont complètement différentes. Elles seront confirmées par le physicien et ingénieur belge Vladimir Pletser (né en 1956), qui s'attela à décrypter le second bâton. Son analyse est fine et ses conclusions sont claires : les deux ossements sont les outils mathématiques les plus anciens de l'humanité. Ils constituent une calculatrice élémentaire en bases 6 et 10. Une calculatrice qui aurait plus de 20000 ans ! Il n'est pas nécessaire d'imaginer les scenarios les plus extraordinaires pour être ébloui : il suffit parfois simplement d'explorer le réel !

D.J.

RÉFÉRENCES

- Dossier « Mathématiques et histoire ». *Tangente* 145, 2012.
- Dossier « Mathématiques et archéologie ». *Tangente* 190, 2019.

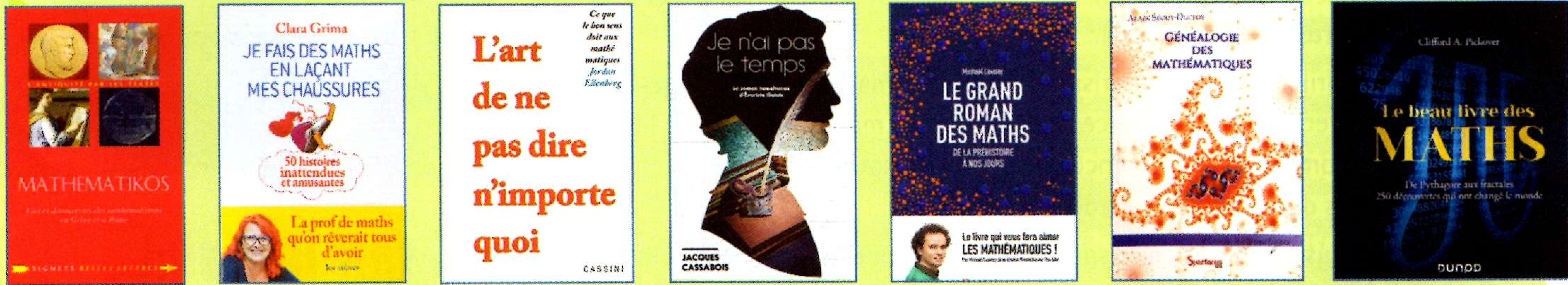
Cratère Katwe.



© Mweya Safari Lodge



LES SUCCÈS DE L'ANNÉE



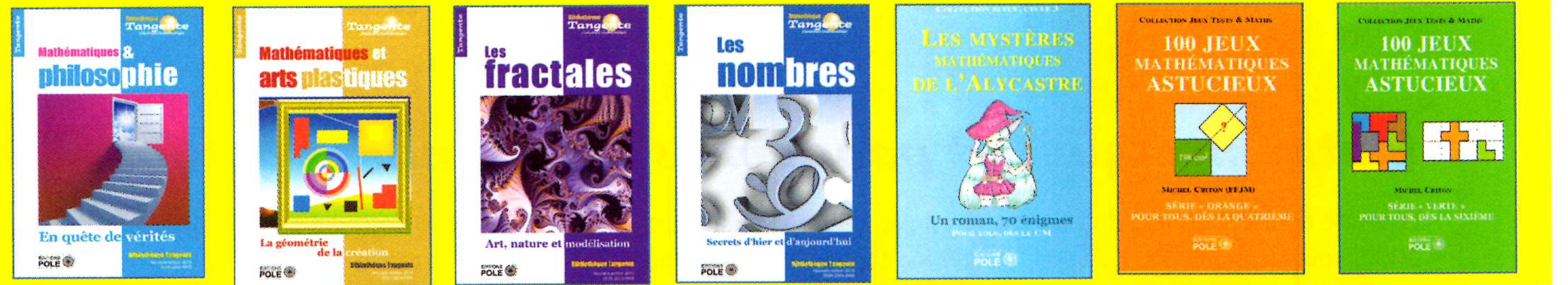
- **Mathematikos** – Prix Tangente 2019 – A. Houlon-Garcia – Belles Lettres – ❒ 15,00 € × ___ex
- **Je fais des maths en laçant mes chaussures** – Mention 2019 – Clara Grima – Les Arènes – ❒ 20 € × ___ex
- **L'art de ne pas dire n'importe quoi** – Prix Tangente 2018 – Jordan Ellenberg – Cassini – ❒ 20,00 € × ___ex
- **Je n'ai pas le temps. Le roman tumultueux d'Évariste Galois** – Jacques Cassabois – HLAB – ❒ 20,00 € × ___e
- **Le grand roman des maths** – Mickaël Launay – Prix Tangente 2017 – ❒ 19,90 € × ___ex – J'ai lu (poche) – ❒ 7,40 € × ___ex
- **Généalogie des mathématiques** – Nominé 2019 – Alain Seguy-Duclot – Spartacus – ❒ 34,90 € × ___ex
- **Le beau livre des maths** – Clifford Pickover – Réédition 2019 – Dunod – ❒ 35,00 € × ___ex

SÉLECTION TANGENTE



- **Les surfaces** – Collectif – Bib Tangente 70 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Intelligence artificielle** – Collectif – Bib Tangente 68 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Mathématiques du développement durable** – Collectif – Bib Tangente 67 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Mathématiques et physique** – Collectif – Bib Tangente 69 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Lunelotte et la réciproque mystérieuse** – Patricia Lebrun – Nle Édition 2020 – POLE - BD – ❒ 12,00 € × ___ex
- **Les déductions du professeur Pythaclide** – Patricia Lebrun – POLE - BD logique – ❒ 10,00 € × ___ex
- **Oedipeland, la planète à énigmes** – G. Cohen-Zardi – POLE - BD logique – ❒ 10,00 € × ___ex

NOUVEAUTÉS TANGENTE



- **Maths et philosophie** – Collectif – Bib Tangente 38 – Nle Édition 2019 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Maths et arts plastiques** – Collectif – Bib Tangente 23 – Nle Édition 2019 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Les fractales** – Collectif – Bib Tangente 18 – Nle Édition 2019 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Les nombres** – Collectif – Bib Tangente 33 – Nle Édition 2019 – POLE Nouveauté – ❒ 22,00 € × ___ex
- **Les mystères de l'Alycasrre** – FFJM – POLE – ❒ 10,00 € × ___ex
- **100 jeux mathématiques astucieux** – Michel Criton – Pole (Nouveauté) – Série orange (dès la 4e) – ❒ 10,00 € × ___ex
- **100 jeux mathématiques astucieux** – Michel Criton – Pole (Nouveauté) – Série verte (dès la 6e) – ❒ 10,00 € × ___ex

Bon à photocopier et adresser par courrier avant le 31–08–20 à :
Librairie Infinimath – 2 rue de la Prée – 27170 COMBON

NOM & PRÉNOM ....
ADRESSE ....
CODE POSTAL .... VILLE ....
E-MAIL : ....

Forfait PORT	1 produit	2 produits et +
France	❒ 4,50 €	❒ 6,00 €
Étranger - DOM - TOM	❒ 6,00 €	❒ 10,00 €

MONTANT TOTAL :

MODE DE PAIEMENT : ❒ Chèque (uniquement payable en France) ❒ Bon de commande administratif joint

❒ Carte bancaire : Numéro : .... Date d'expiration : .... Cryptogramme : ....

DATE : **SIGNATURE :**

par Martine Brilleaud et Élisabeth Busser

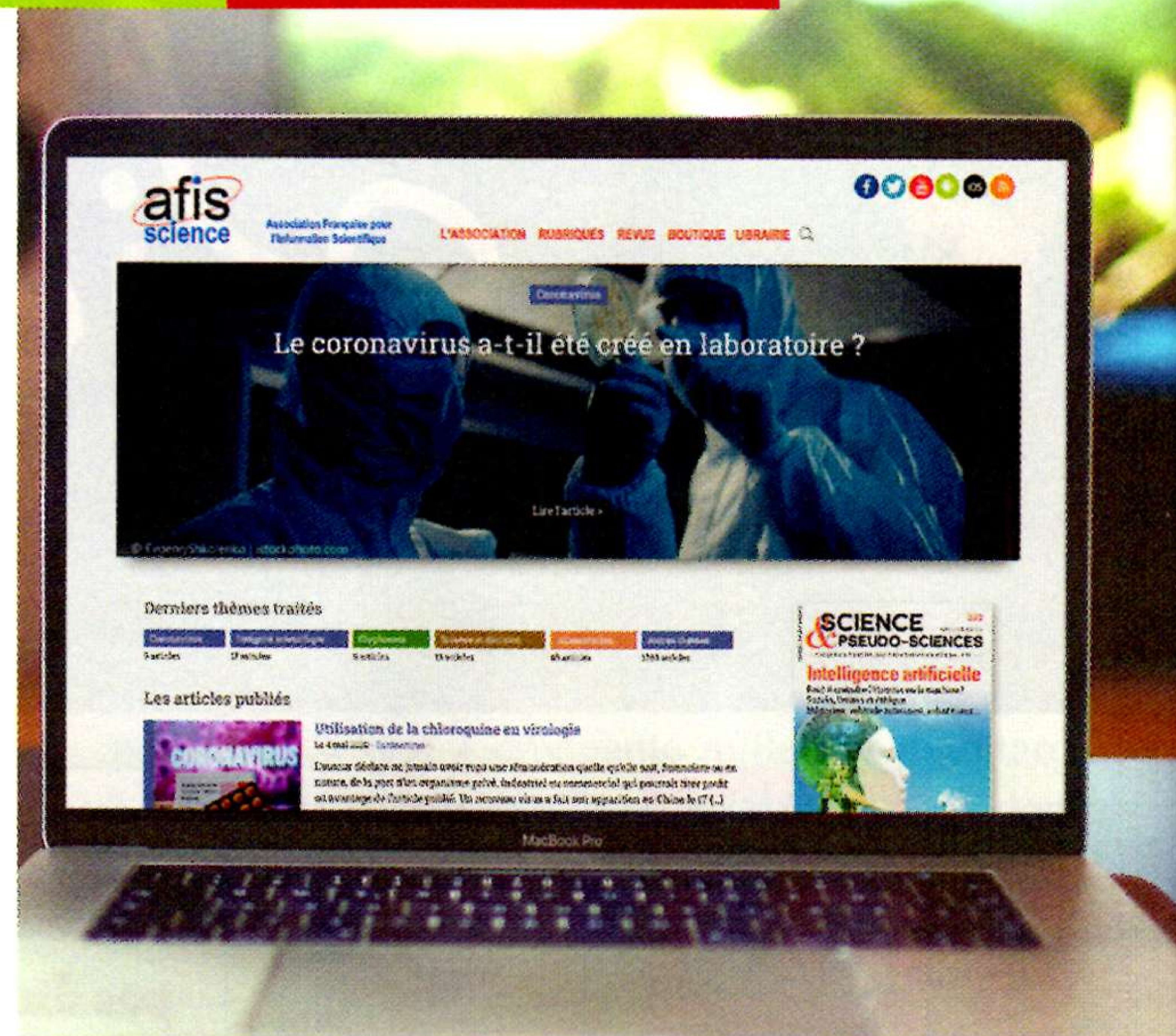
Pour s'informer intelligemment

Le Centre national de la recherche scientifique (CNRS) a mis en place un fil d'actualité sur le Covid-19 (**cnrs.fr/fr/cnrsinfo/coronavirus-sur-le-front-scientifique**). On y trouve des liens vers des articles de la revue de vulgarisation *CNRS Le Journal*, des interviews, des communiqués de presse sur les dernières avancées, des *podcasts* de chercheurs dans la série « Covid-19 : la parole à la science », ou de courtes vidéos explicatives sur la chaîne Youtube « Diffusons la science » (**diffusonslascience.fr**).

Le site « Florilège de la popularisation des mathématiques » (**florilege-maths.fr**) recense des ressources sur les aspects mathématiques de la question comme des conférences en ligne de mathématiciens ou de spécialistes de statistiques médicales.

Les nombreuses explications disponibles sur les modèles mathématiques de l'épidémie sont à mettre en regard avec les avertissements du mathématicien David Madore, qui explique de façon détaillée sur son *blog* (**madore.org/~david/weblog**) *« pourquoi l'utilisation de modèles pour simuler les épidémies ne marche pas quand il s'agit de prédire l'avenir (et pourquoi ça ne signifie pas que ces modèles sont inutiles) ».*

Mentionnons également la chaîne YouTube « Risque Alpha », animée par un médecin féru de statistiques.



L'AFIS fait le point sur ce que sait la science

L'Association française pour l'information scientifique (AFIS, **pseudo-sciences.org**) a créé sur son site une page intitulée « Coronavirus – Comment s'informer ? ». Elle liste les sources scientifiques, provenant d'instituts de recherche, de sociétés savantes, de l'Académie de médecine, de l'Organisation mondiale de la santé ou d'autres organisations, qu'il est possible de consulter pour se faire son propre avis sur cette crise. Pour qui voudrait explorer directement les sites de ces divers organismes, tous les liens sont classés selon cinq catégories : « Situation mondiale », « Gouvernement français et agences sanitaires », « Sociétés savantes et institutions », « Protocoles d'évaluation des traitements », « Contre les rumeurs infondées et la désinformation ».

Enfin, l'AFIS met en accès libre des articles spécialisés qui font le point sur ce que l'on sait de la pandémie.

lu vu entendu

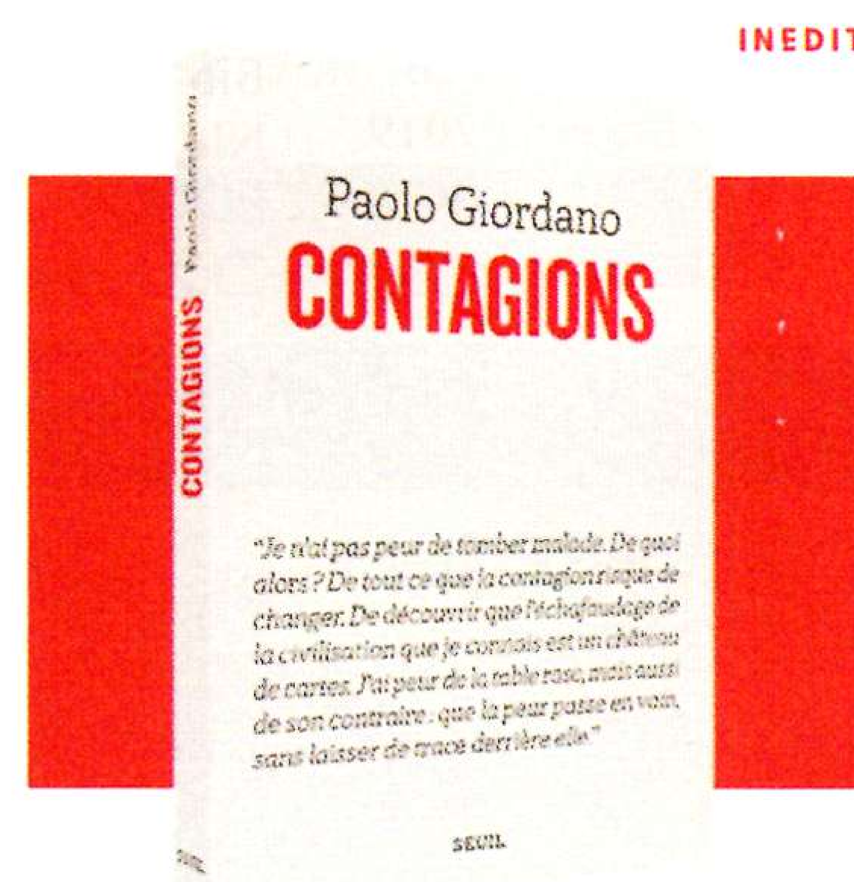
Mathématiques et pandémies : un roman d'actualité

Le jeune écrivain italien, docteur en physique, a remporté un succès mondial avec *la Solitude des nombres premiers* (Points, 2009, voir *Tangente* 131). Avec *Contagions*, écrit en quelques jours au début de l'actuelle épidémie de coronavirus, l'auteur nous livre ses réflexions sur un phénomène *« à la mesure du monde d'aujourd'hui, global, interconnecté, inextricable ».* Pour lui, *« avant d'être des urgences médicales, les épidémies sont des urgences mathématiques ».* De fait, le roman détaille le modèle SIR (voir en page 24) ou le fameux R_0 (voir en page 16), expliquant la diffusion de l'épidémie en termes de théorie des graphes. Des explications, certes, mais aussi des interrogations et des doutes : *« Quelle est la vérité lorsqu'on interroge les mêmes données, partage les mêmes modèles et arrive à des conclusions opposées ? »*

Une partie des droits sera reversée pour la gestion de l'urgence sanitaire et la recherche scientifique.

É.B.

INEDIT



Contagions. Paolo Giordano, Le Seuil, 64 pages, 2020, 9,50 euros, en accès libre sur le site Internet de l'éditeur et en librairie ultérieurement.

En bref : La surmortalité 5

Lu, vu, entendu : Autour du Covid 10

Une équation à trop d'inconnues 12

Modélisation et calculs sur le vif 16

La statistique épidémiologique 19

La naissance de l'épidémiologie 20

Les enquêtes étiologiques 23

Covid-19 : les maths à la rescousse 24

Covid-19, une approche mathématique

Les mathématiques peuvent-elles aussi sauver des vies ? La pandémie de Covid-19 a surpris par sa virulence mais également par la rapidité de sa propagation. De nombreuses statistiques, parfois contradictoires, ont été publiées. Les modèles mathématiques permettent d'appréhender, de comprendre, d'étudier, de prédire les phénomènes qui nous entourent. Mais quel peut être leur apport alors que tant d'inconnues subsistent ? En quantifiant et expliquant leurs conséquences directes sur la propagation, les modèles justifient-ils certaines mesures à prendre, si pénibles soient-elles ? Les outils mathématiques utilisés pour appréhender la complexité du vivant ne restent que des approximations qui peuvent mettre sur des pistes explicatives, mais ne pourront remplacer une réelle compréhension des phénomènes.

L'alliance des mathématiques et des autres sciences permettra, espérons-le, de prendre les bonnes décisions.

par G. Cohen, B. Hauchecorne, J.-L. Legrand

Une équation
à trop d'inconnues

La pandémie de Covid-19 a surpris par sa virulence mais aussi par la rapidité de sa propagation. De nombreuses statistiques, parfois contradictoires, sont publiées. Des mesures, souvent différentes, ont été prises par les gouvernements. Des traitements médicaux variés sont appliqués. Les mathématiques peuvent-elles aider à prendre les bonnes décisions ?

L'approche mathématique d'une épidémie a fait l'objet de nombreuses théories, dont *Tangente* s'est déjà fait l'écho. Mais dans le cas du virus de l'épidémie actuelle (SARS-CoV-2, de la famille des coronavirus), bien des inconnues subsistent. Ainsi, le fait que certaines personnes, comme les enfants, puissent être des porteurs sains cache certaines données primordiales comme le nombre de personnes infectées puis immunisées.

Pour étudier l'expansion de la pandémie dans une région donnée, des modèles ont été mis en place. Mais compte tenu de la faible connaissance de la maladie, les premiers résultats ne correspondaient pas vraiment aux constats du terrain.

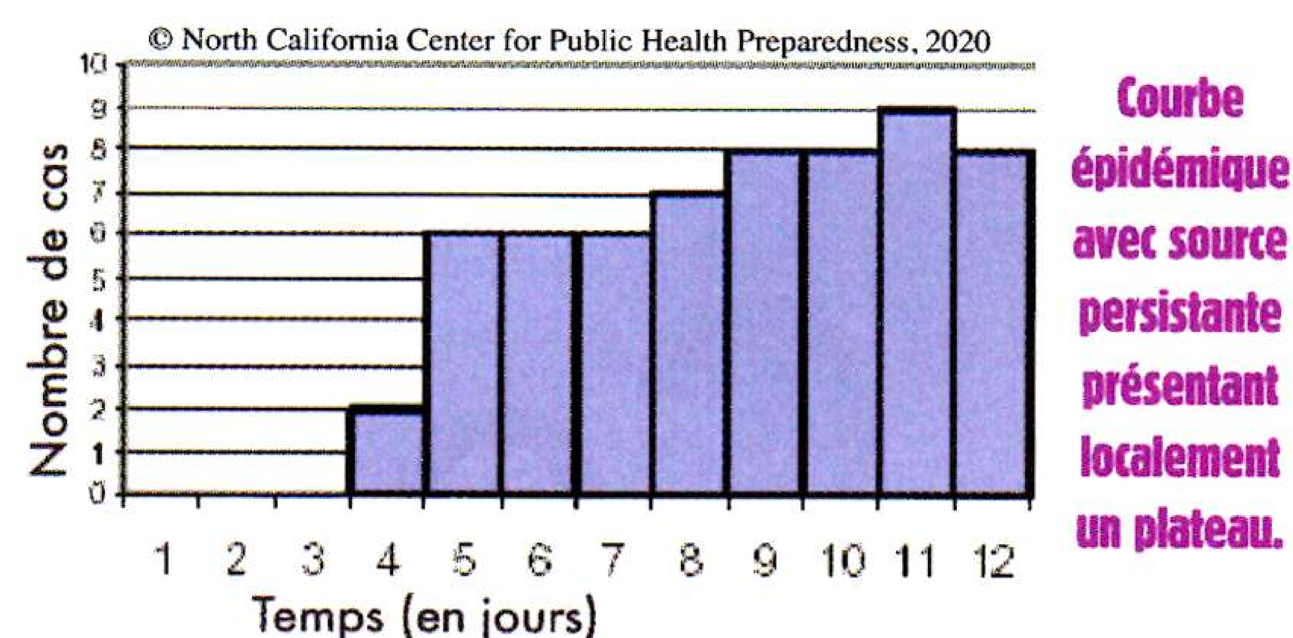
Dès le 24 janvier, l'équipe de Vittoria Colizza à l'Inserm (Institut national de la santé et de la recherche médicale) présentait une étude pour estimer le risque d'importation de l'épidémie en Europe, qui s'appuyait sur les flux de passagers des régions chinoises contaminées, avant le confinement, vers les grandes villes européennes, en estimant la probabilité qu'un passager soit porteur du virus et qu'il le transmette à destination.

© Unsplash (photo : CDC)

Nous n'avons pas les moyens de tester massivement, faisons des sondages !

+ Données nécessaires aux modèles

La distribution des cas en fonction du temps produit une « courbe épidémique ». Suivant son allure, on peut en déduire certains éléments : une courbe présentant un pic suivi d'une phase de décroissance est caractéristique d'une source de contamination ponctuelle. La présence d'un « plateau » montre une source persistance. Une courbe avec plusieurs « vagues » indique une transmission inter-humaine. Le 11 avril, Jérôme Salomon, directeur général de la Santé, annonçait à propos du Covid-19 en France : *« Un très haut plateau semble se dessiner, mais l'épidémie reste active. »*



Courbe épidémique avec source persistante présentant localement un plateau.

La *morbidité* se rapporte à l'étude des cas de contamination dans une population donnée tandis que la *mortalité* décrit la fréquence des décès dans cette même population. Les *indicateurs statistiques* associés indiquent la fréquence d'un phénomène tandis que les *indicateurs dynamiques* s'intéressent à sa vitesse de survenue. Ainsi, la *prévalence* d'une maladie (nombre de cas / nombre d'individus dans la population étudiée) est un indicateur statique de morbidité. *L'incidence* est un indicateur dynamique (nombre de nouveau cas pendant une période donnée / population pendant la même période). Il est assimilé au risque de tomber malade pendant cette période. La *létalité* représente la part de décès parmi les malades. Elle témoigne de la gravité de la maladie.

Pour essayer de mettre en place une stratégie, il faut savoir que le taux de reproduction d'une épidémie est fonction de trois données principales :

1. la durée pendant laquelle un porteur du virus est contagieux ;

2. le nombre moyen de contacts que chacun a quotidiennement avec d'autres personnes ;
3. la probabilité qu'un contact entre un infecté et un individu sain conduise à une transmission du virus. Face à une situation comme celle du Covid-19, il y a un effet de seuil à maîtriser : pour éteindre progressivement une épidémie, ce taux doit passer au-dessous de 1. Or, on ne connaît ni le premier paramètre, ni le troisième.

+ Les stratégies des différents pays

Face à ces données, les stratégies adoptées par les États sont différentes. Une réaction possible est de jouer sur le deuxième paramètre : on confine tout le monde ! Le confinement, conseillé par l'Organisation mondiale de la santé (par facilité ?), a été la réponse de nombreux gouvernements, notamment la France.

Était-ce nécessaire compte tenu de l'impact sur la vie économique mais aussi sociale ? On se doute que cela va réduire le nombre de personnes atteintes, mais rien ne le prouve pour l'instant. Des études semblent montrer qu'en l'absence de médicament efficace et/ou de vaccination, entre 50 et 70 % de la population sera touchée. Ce qui est certain, c'est que le confinement ralentit l'épidémie et permet d'éviter une surcharge des structures hospitalières d'urgence vitale. On peut aussi espérer que la découverte d'un traitement pourra augmenter les chances de guérison. Le premier objectif est ici d'« aplatir » la courbe des contaminations.

On pourrait aussi jouer sur le troisième facteur, ce que semblent faire (avec plus de succès ?) la Corée du Sud et l'Allemagne. Ne maîtrisant pas (on n'y peut rien, pour combien de temps encore ?) la probabilité cherchée, on diminue son domaine d'application : pour cela, on teste un maximum de personnes, et on confine les porteurs, même sains, afin de faire baisser le nombre des contacts avec un infecté. Ceci peut être plus efficace que le confinement général. De toutes les façons, à la sortie du confinement, on devra augmenter l'immunité collective (sous réserve qu'elle existe, ce qui n'est pas avéré).

Jean-Paul Krivine, président de l'Association française d'information scientifique, s'exprime ainsi dans *L'Express* : *« Les connaissances sur le virus, son mode opératoire et ses propriétés infectieuses, si elles progressent rapidement, sont encore bien partielles. Il est ainsi difficile d'évaluer précisément toutes les conséquences d'une décision dans le cadre d'une gestion de crise en situation d'urgence. »*

Une évidence conduit ainsi à mettre en cause, par exemple, la politique adoptée en France : il est fondamental de tester la présence du virus sur un vaste panel de la population, d'une part pour disposer de statistiques plus fiables, d'autre part pour accélérer la protection des non-contaminés en confinant les porteurs.

Jean-Michel Marin, président de la Société française de statistique, a adressé le 9 avril au Président de la République un courrier insistant sur la nécessité de campagnes de dépistage sur des échantillons représentatifs de la population pour parvenir à des prédictions les plus robustes possible. Sa conclusion ? *« Nous n'avons pas les moyens de tester massivement, faisons des sondages. »*

Une telle mesure entraîne, naturellement, des difficultés : comment se procurer autant de tests ? Comment faire en sorte que tous les laboratoires puissent en disposer ? D'autant qu'il y a deux types de tests : ceux qui indiquent si l'on est porteur de la maladie à l'instant *t* (pour savoir qu'on est contagieux et qu'on va avoir besoin de soins), et les tests *sérologiques*, qui repèrent le développement d'anticorps. Le Premier ministre français a confirmé la nécessité de sept cent mille tests par semaine, un chiffre qui fait polémique mais, quand bien même ce serait possible, il faudrait près de deux ans pour tester toute la population ! Enfin, une autre difficulté consiste, une fois les prélèvements effectués, à les examiner un à un pour détecter ceux qui sont positifs. Là encore, les mathématiques peuvent jouer un rôle, détaillé dans l'article de Claudine Schwartz (voir en page 16). Les difficultés pratiques et économiques liées à ces tests ne sont rien, pourtant, à côté des conséquences d'un confinement de longue durée de toute la population (voir encadré).

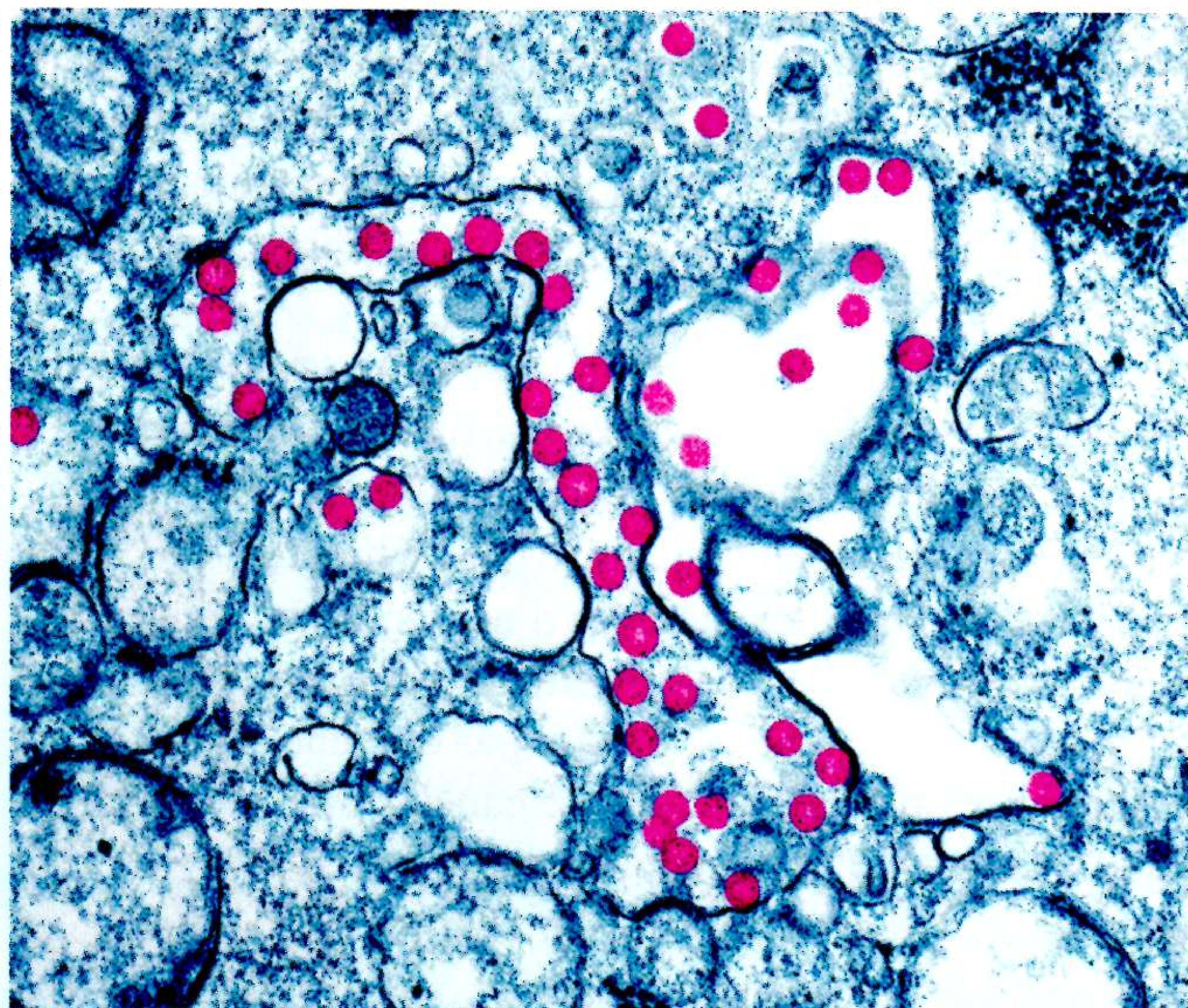
Les dégâts collatéraux du confinement

Le confinement général prolongé a des effets secondaires importants sur l'économie. Des milliers d'entreprises risquent, rien qu'en France, de ne pas lui survivre. Tant pis si l'on est certain que cela va stopper la pandémie. Mais en est-on sûr ? Et n'y avait-il pas de meilleurs solutions, comme celle de la généralisation des tests ?

Les conséquences peuvent aussi être négatives, voire tragique, pour les personnes atteintes d'autres maladies, en particulier cardiaques. Les hôpitaux repoussant un grand nombre d'interventions, soit parce qu'ils sont saturés, soit par précaution (pour éviter les contaminations), cela provoque ou accélère d'autres décès. Ainsi, l'Académie nationale de médecine attire l'attention sur le fait que l'épidémie de Covid-19 ne doit pas être une perte de chance pour les patients atteints de cancer. Elle recommande que les possibilités de recours aux soins soient sauvegardées et d'adapter la prise en charge de certains patients au contexte épidémique. Et que dire de la situation à l'intérieur des établissements d'hébergement pour personnes âgées dépendantes (EHPAD), où le confinement a pu avoir les conséquences inverses de celles recherchées ?


© 123RF / Antonio Diaz

La polémique de la chloroquine :
démarche de chercheur *versus* démarche de soignant


© Hannah Bullock et Azaibi Tamin - CDC - Science Source

En matière de vaccination ou de médicament, l'approche moderne est l'EBM (*evidence-based medecine*, ou « médecine fondée sur les preuves »), qui s'appuie sur l'indice de confiance des essais contrôlés pour décider d'une action médicale. D'où la polémique avec l'Institut hospitalo-universitaire Méditerranée-Infection qui, lui, privilégie la démarche classique de la comparaison historique, qui a un intérêt humain, celui de ne pas léser ni laisser mourir (le placebo est très utilisé en EBM).

Cette polémique, qui semble diminuer au profit d'une validation de l'efficacité du traitement s'il est appliqué à temps, en est une preuve tangible. Les adversaires du procédé du professeur Didier Raoult clament que ces résultats ne démontrent pas son efficacité parce qu'ils n'ont été comparés à ceux d'un groupe témoin : si ces patients n'avaient pas été soignés à l'HCQ-AZ (hydroxychloroquine-azithromycine), ils auraient peut-être connu le même destin.

Le mathématicien Raphaël Douady* indique dans *Les Échos* : *« La statistique et le bon sens imposent de donner le feu vert au plus vite au traitement du professeur Raoult. Le premier argument en faveur d'un traitement immédiat et systématique des patients présentant un risque de développer une forme sévère de détresse respiratoire, sans attendre que ce soit le cas, est l'asymétrie. D'un côté, une situation potentiellement explosive : des personnes infectées en contaminent d'autres, de sorte qu'à partir d'un petit nombre de personnes atteintes par le virus, un très grand nombre de personnes peuvent être contaminées. De l'autre côté, même en admettant un risque mal estimé d'accidents du traitement, aucun risque de contamination : un accident de traitement n'en provoque pas chez le voisin. En statistiques, ces situations ont un nom. D'un côté, une incertitude incontrôlée,* à queues de distribution épaisses *: l'incertitude, à partir d'une centaine de cas observés, peut potentiellement devenir millions. De l'autre côté, une incertitude contrôlée,* à queues de distribution fines *: le pourcentage d'accidents peut, peut-être, doubler, mais ne va pas se multiplier indéfiniment. »*

* L'article complet de Raphaël Douady est librement accessible en ligne sur **tangente-mag.com**

+ La fiabilité des informations statistiques

Mais comment détecte-t-on une contamination et peut-on s'en prémunir ? Pour parvenir au plus vite à juguler l'épidémie, des données statistiques fiables sont indispensables. Or, nous sommes noyés sous une multitude de chiffres qui introduisent des biais considérables dans l'analyse, à commencer par la date de début de l'épidémie.

L'Insee (Institut national de la statistique et des études économiques) a décidé de diffuser temporairement, à un rythme hebdomadaire, le nombre de décès enregistrés dans chaque département, afin de contribuer en toute transparence à la mise à disposition de données pendant la pandémie de Covid-19. Le principe : comparer l'évolution de la mortalité entre 2019 et 2020 et mesurer l'impact de l'épidémie.

Les statistiques reposent sur le Répertoire national d'identification des personnes physiques (RNIPP), qui recense tous les actes d'état civil, mais ne précise pas les causes de décès.

Malgré cela, quelques questions essentielles n'ont pas encore de réponse claire. La plus importante concerne le pourcentage de malades, d'hospitalisés, de morts. À quelle catégorie de la population est-il rapporté ? À celui des porteurs avérés (impossible à déterminer sans des tests massifs) ou à celui des personnes s'étant déclarées malades, voire ayant été hospitalisées ? On compte des guérisons et des morts, certes, mais de quoi ? Quelles pathologies combine-t-on ? Les facteurs de risque sont-ils pris en compte dans les statistiques qui circulent ?

Les chiffres semblent très différents d'un pays à l'autre. Ils dépendent en effet de la population sur laquelle ils portent, du type et de la date de début des mesures prises par les gouvernements et même du départ de l'épidémie, qui n'est pas simultané partout, des données qui agissent sur la courbe d'évolution. Ne parlons pas des particularités locales, qui peuvent modifier le constat, ni des biais volontaires dans des pays où la circulation de l'information est filtrée.

Pourtant, la fiabilité des statistiques est nécessaire

pour préciser le descriptif de la maladie et ses conséquences sur chaque type de population (taux de contamination, délai de décontamination), de répondre à des questions fondamentales comme « Est-on immunisé après l'avoir contractée ? » ou « Quels produits permettent de guérir ? ».
Ainsi, il a été constaté (dans une étude du Centre d'études des modes d'industrialisation de l'École des hautes études en sciences sociales) que le virus est moins présent dans les zones où le paludisme est présent. La vaccination contre la malaria protègerait-elle du virus ?

+ Le rôle des mathématiques

C'est le rôle des mathématiques de jeter un regard critique sur les chiffres qui circulent, puis de valider ceux qui vont permettre, après synthèse des informations, d'établir des modèles, faire des prédictions en extrapolant des courbes (à conditions qu'elles soient obtenues à partir de données fiables), et de donner aux scientifiques comme aux gouvernants les informations qui leur permettront de prendre des décisions.
Autre usage des maths : permettre de confirmer la fiabilité et la sensibilité des tests (voir *Tangente* 165, 2015), développer des protocoles de traitement de données qui aideront à lutter contre la maladie, par exemple, en repérant des clusters (regroupement de cas). En Chine, où le gouvernement s'est offert la possibilité (technologique et éthique) de géolocaliser les *smartphones* de l'ensemble de la population, une application, dont l'installation est « facultative », indique, par un code couleur, le niveau de contamination probable d'une personne grâce au traçage de ses contacts avec d'autres personnes. Une probabilité trop importante de contamination interdira l'accès à certains lieux, comme les transports en commun, voire obligera au confinement. En France, le plus délicat à réaliser mathématiquement est le processus d'anonymisation des données, indispensable au feu vert nécessaire de la Commission nationale de l'informatique et des libertés (CNIL).

D'une façon générale, la communauté mathématique se mobilise dans la lutte contre le Covid-19. Citons le projet Polymath (voir en page 5), ouvert à tous et transparent, qui vise à récupérer, synthétiser et analyser les données disponibles. Ce n'est que le début, mais d'ores et déjà, concrètement, on peut trouver sur Internet un descriptif du projet, un Wiki pour regrouper les données, liens, sources… et une annonce « grand public » de Terence Tao.
L'informatique est aussi largement sollicitée, en particulier pour des modèles qui aideront les scientifiques à concevoir de nouveaux médicaments capables de neutraliser le coronavirus en l'empêchant de pénétrer dans les cellules humaines ou en bloquant ses mécanismes internes. Pour l'un d'entre eux, les chercheurs s'appuient sur un accès prioritaire (*urgent computing*) à Jean-Zay, le supercalculateur le plus performant en Europe, et sur l'approche la plus rapide existante pour les simulations de dynamique moléculaire de nouvelle génération.
Alors soyons confiants. L'alliance des mathématiques et des autres sciences permettra, nous l'espérons, de ne faire du Covid-19 qu'un mauvais souvenir.

G.C., B.H. & J.-L. L.



© 123RF / Prasit Rodphan

par Claudine Schwartz

Modélisation et calculs sur le vif

La pandémie actuelle nous rappelle que les modèles mathématiques s'élaborent par étapes, à partir d'hypothèses scientifiques et des données disponibles. Ce ne sont pas des objets du monde réel mais des abstractions. Leur fiabilité ne peut être établie qu'après confrontation à la réalité.

Modéliser, c'est jeter un pont entre des pans du *réel* et des fictions, associer à un bout de réalité des modèles, ici mathématiques, qui permettent d'expliquer ou de prévoir. Ainsi, l'explication des lois empiriques des grands nombres est fournie par des théorèmes comme la *loi des grands nombres* ou *le théorème central limite* (voir *Tangente* 149, 2012). Ces résultats conduisent à des prévisions du type PAC (« probablement approximativement corrects », le « probablement » et l'« approximatif » étant quantifiés : dans le cas de sondages, toute prévision est accompagnée d'une *fourchette*, qui quantifie l'approximation, et d'un *niveau de confiance* de cette fourchette, qui quantifie le « probablement »).

Rostislav Sedlacek - stock.adobe.com

+ Modèles et modèles jouets

Modéliser, c'est aussi se projeter dans des mondes possibles, la simulation jouant alors le rôle d'expérimentation dans de tels mondes. En pleine pandémie du coronavirus, on fait des expériences de biologie *in vitro*, des essais thérapeutiques (expérimentations sur l'homme dans le cadre de la « médecine des preuves ») et beaucoup de modélisations et de simulations. Dans un tel contexte expérimental, on parle de *modèles jouets* (ou *toys models*). On peut avoir des modèles jouets de l'évolution temporelle d'épidémies dans chaque pays, et regarder dans ces mondes fictifs les effets de diverses formes de confinement ou de déconfinement. Comme on manque d'informations fiables et précises sur certains paramètres cruciaux (notamment sur les contaminés et les immunisés), on va faire des simulations, non sur un seul modèle, mais avec diverses classes de modèles et plusieurs valeurs des paramètres en jeu.

Dans le cas de la pandémie Covid-19, grâce à des procédés statistiques d'estimation dynamique des paramètres, les « vues de l'esprit » que sont ces modèles ont finalement permis des prévisions qui, en début de confinement, à l'échelle d'un pays ou d'une région, se sont avérées pertinentes à très court terme (deux ou trois jours), mais il était tout à fait illusoire de faire de la prévision à plus long terme. Au bout de quelques semaines de confinement, on travaille avec d'autres modèles (par exemple à l'Institut Pasteur de Paris et à l'Inserm), qui peuvent raisonnablement être utilisés pour faire de la prévision à quelques semaines, si rien ne change dans l'organisation du pays. On essaye en quelque sorte d'« habiller » des aspects de la pandémie avec des modèles prenant en compte les informations dont on dispose, et un habit qui va un jour n'ira plus le mois suivant. Comme il est nécessaire d'avancer, on va prendre des décisions, sans garantie absolue que ce soient les bonnes, et observer (est-ce que cela se passe comme dans le modèle, faut-il lui intégrer

de nouveaux éléments ou le changer complètement ?). Les modèles, et plus particulièrement les modèles jouets, ne sont pas là pour dire « la vérité ». Ils permettent une forme de comparaison entre différentes actions possibles et en cela sont des aides à la pensée et à la décision.
Une phase d'élaboration de modèles plus pérennes se fera plus tard pour comprendre et expliquer les différences entre pays ou régions, par exemple.

À côté des questions qui relèvent de la biologie ou de l'épidémiologie, il y a aussi la logistique de la vie courante, qui apporte un lot immense de micro-questions éphémères à résoudre vite. En voici une qui appelle des calculs dans des modèles rudimentaires (le terme « modèle » signifiant simplement ici qu'on va parler de probabilités, que celles-ci ne sont pas des objets du monde réel mais des abstractions utilisées pour entrer dans la théorie des probabilités et bénéficier des ressources qu'elle offre en abondance, et dont l'utilisation, loin de les appauvrir, permet de les enrichir).

+ Doit-on « pooler » les tests ?

Le nombre de tests de dépistage de l'infection par le coronavirus qu'on est en mesure de réaliser chaque jour est trop limité au regard des besoins. Pourrait-on, pour économiser le réactif utilisé, « pooler » les tests, c'est-à-dire mélanger les prélèvements recueillis auprès de n personnes et commencer par faire un unique test sur ce prélèvement « poolé » ? S'il est négatif, on a fait l'économie de $n - 1$ tests. S'il est positif, on refait n tests et on aura fait un test de trop. Est-ce qu'on y gagne ? Comme les calculs sont simples, on va les faire, avant même de prévoir des réunions pour savoir si « pooler » est techniquement réalisable.

Au plan théorique, on a fait sans le dire une hypothèse d'indépendance des résultats des tests. En l'absence de toute information, c'est la seule chose que l'on puisse faire : à information pauvre, modèle pauvre. Mais ce n'est pas réaliste. Si par exemple, on envisage de « pooler » dans des maisons de retraite, il faudra réfléchir à cette question (sans y passer trop de temps, tout doit aller vite) et voir si on peut s'approcher de l'indépendance, par exemple en ne « poolant » que les résidents d'un même couloir.
À la vue du tableau de l'encadré, compte tenu notamment du fait que la valeur de p est inconnue, qu'elle dépend à la fois du temps et des lieux, l'idée n'a pas été poussée, sans regarder la faisabilité technique de « pooler » les prélèvements.

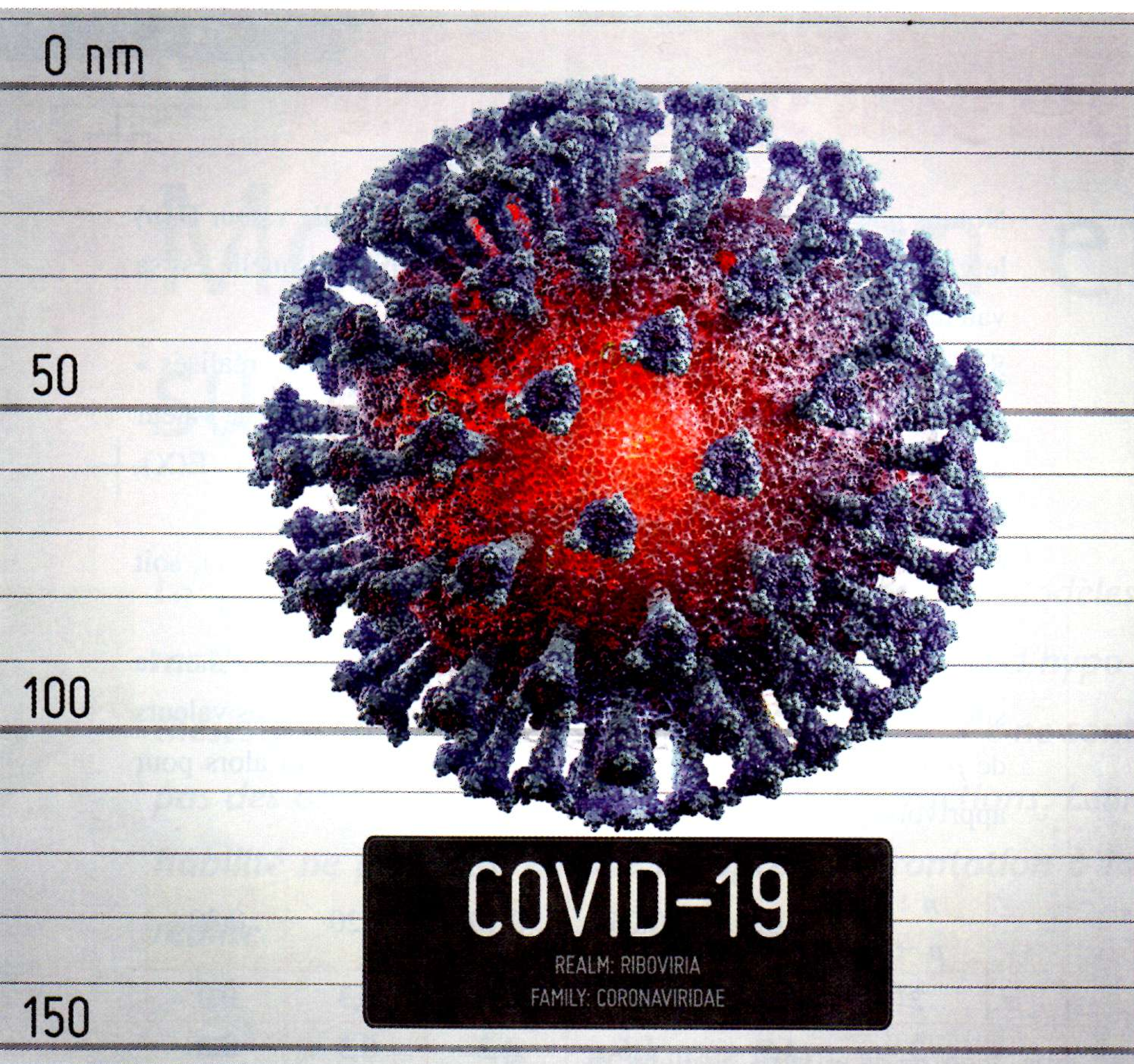
Les gains sur un exemple

Notons p la probabilité d'être testé positif. Pour quelle valeur N(p) le gain moyen du nombre de tests est-il maximum et quelle est sa valeur ?
Si l'on appelle X la variable aléatoire « nombre de tests réalisés » (elle prend la valeur 1 ou $n + 1$), on veut calculer pour quelle valeur de n le maximum de la fonction $G(n)$ est atteint, où $G(n) = n - E(X)$, et quelle est sa valeur. E(X) désigne l'espérance de X.
On a $G(n) = n - \text{Prob}(X = 1) - (n + 1)\,\text{Prob}(X = n + 1)$, soit $G(n) = n - (1 - p)^n - (n + 1)(1 - (1 - p)^n)$.
On va chercher l'optimum pour des valeurs de n « réalistes » dans la situation envisagée, disons entre 1 et 10, et pour différentes valeurs de p (0,01 ; 0,05 ; 0,10 ;0,20 ; 0,30). Un tableur suffit alors pour apprivoiser la question.

$n \downarrow$ $p \rightarrow$	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30
2	1,0	0,8	0,6	0,3	0,0
3	1,9	1,6	1,2	0,5	0,0
4	2,8	2,3	1,6	0,6	0,0
5	3,8	2,9	2,0	0,6	– 0,2
6	4,6	3,4	2,2	0,6	– 0,3
7	5,5	3,9	2,3	0,5	– 0,4
8	6,4	4,3	2,4	0,3	– 0,5
9	7,2	4,7	2,5	0,2	– 0,6
10	8,0	5,0	2,5	0,1	– 0,7

Le projet SMEL

Le projet Statistique médicale en ligne (SMEL), mis en place par Claudine Schwartz et Bernard Ycart, propose une initiation interactive à la statistique. Trois initiatives sont développées : une couche « Articles » propose des textes de référence, contenant des exemples d'utilisation de la statistique ; une couche « Lexique » contient un index des termes statistiques ; une couche « Cours » propose un cours (au sens traditionnel) de statistique. Le cours porte essentiellement sur les modèles probabilistes, la statistique descriptive, l'estimation paramétrique et les tests statistiques. On y trouve tous les classiques mathématiques (variable aléatoires, théorèmes limites, régression linéaire, test de Kolmogorov-Smirnov...) mais aussi des thèmes qui s'appliquent particulièrement en médecine (comme les tests de Wilcoxon et de Mann-Whitney). Les activités de simulation et les applications développées se basent le plus souvent sur des données réelles.



Corona Borealis - stock.adobe.com

Les calculs faits supposent aussi, sans le dire explicitement, que si le test « poolé » est négatif, on a gardé de quoi pratiquer un nouveau test avec les prélèvements individuels. S'il faut refaire des prélèvements, en admettant que ce soit possible (cas d'un EHPAD), c'est dérangeant pour les personnes testées et a un coût, ne serait-ce qu'en temps d'infirmière. Cela doit alors être pris en compte et ne l'est pas dans le calcul ci-dessus. On pourrait dire qu'en tel cas ce modèle est « faux », mais « juste » ou « faux » n'est pas une dialectique appropriée pour les modèles.

On ne s'est pas non plus intéressé au lien crucial entre avoir un test positif et être infecté par le coronavirus. Les tests ne sont pas fiables à 100 % ; il y a des *faux positifs* et des *faux négatifs*…

L'ensemble des individus testés positifs est composé des *vrais positifs* et des *faux positifs*. Si r est la prévalence de l'infection dans la population où est pratiqué le test, on a $p = \text{Se} \times r + (1 - \text{Sp}) \times (1 - r)$, avec Se la *sensibilité* (probabilité d'avoir un test positif sachant par ailleurs que la personne est contaminée) et Sp est la *spécificité* (probabilité d'avoir un test négatif sachant que la personne n'est pas contaminée). La sensibilité et la spécificité sont des caractéristiques intrinsèques de tout test diagnostic.

Fin mars 2020, la sensibilité des tests était de l'ordre de 0,7. La spécificité des tests est mal connue. Mettons-la à 1 (on néglige les faux positifs). Le nombre de personnes infectées pourrait est alors environ 1,4 fois celle du nombre de gens testés positifs.

Cette sensibilité est faible pour des raisons qui tiennent plus au mode de prélèvement qu'à l'analyse ultérieure (on peut avoir des virus dans les poumons et ne pas en avoir assez pour que ce soit détectable dans les voies aériennes supérieures). On travaille intensément à augmenter la fiabilité de ce test, notamment en changeant les modalités de prélèvements.

+ Tests : une utilisation délicate

Si l'idée de « pooler » avait été maintenue, il aurait fallu s'intéresser à ce qui permet l'interprétation des résultats d'un test, c'est-à-dire à la probabilité qu'un individu testé positif soit malade (VVP, ou « valeur prédictive positive ») et la probabilité qu'un individu testé négatif ne le soit pas (VPN, ou « valeur prédictive négative »). Hélas, ces valeurs dépendent de la fréquence de la maladie dans l'environnement de la personne testée. Comme il s'agit d'une maladie contagieuse avec *clusters* (foyers d'infection) où cette fréquence varie beaucoup, même en dehors de test « poolés », l'utilisation individuelle de ces tests est délicate. Être « testé négatif » ne rend pas négligeable la probabilité que l'individu soit malade : s'il vit dans un environnement avec 25 % (ou 50 %) de malades, la probabilité, sachant que son test est négatif, qu'il soit malade est de l'ordre d'une chance sur dix (ou une chance sur quatre).

Cet intermède sur les tests diagnostiques témoigne sans doute de l'intérêt et des limites des « calculs mathématiques de coin de table » (ce qui a été fait ici). Il illustre aussi l'écart qu'il peut y avoir entre un exercice de probabilités, ou d'ailleurs l'utilisation de modèles classiques d'évolution des épidémies qu'on peut faire tout seul chez soi avec quelques connaissances de base, et la modélisation par des professionnels, qui se fait dans des équipes multidisciplinaires.

C.S.

RÉFÉRENCES

- *Les statistiques*. Bibliothèque Tangente 34, 2009.
- « Méfions-nous des modèles mathématiques des épidémies ». David Madore, 14 avril 2020, disponible en ligne.

par Cassiopée Cunibil



© 123rf / sondem

La statistique épidémiologique

Contrairement à ce que son nom l'indique, l'*épidémiologie* est une discipline à considérer au sens large. Dans l'acception actuelle, son champ d'application a dépassé celui de l'étude des maladies infectieuses et peut s'élargir à toutes les pathologies humaines (maladies chroniques, génétiques, environnementales, comportementales, accidents…).

Cette discipline étudie deux grands axes :

- *descriptif*, qui mesure les phénomènes de santé dans une population ;
- *analytique*, qui recherche les causes éventuelles des maladies.

Lorsque l'on se livre à des études de phénomènes biologiques, il faut garder à l'esprit qu'ils ne sont pas dus au hasard. Ce n'est que la multiplicité du nombre de combinaisons possibles qui donne l'illusion du hasard. Ainsi les outils mathématiques, formalisés pour des évènements indépendants, doivent-ils conserver leur statut de modèles. Et les utilisateurs se garder d'une interprétation purement mathématique sans rapport avec la réalité du terrain.

Affirmer la réalité d'une épidémie

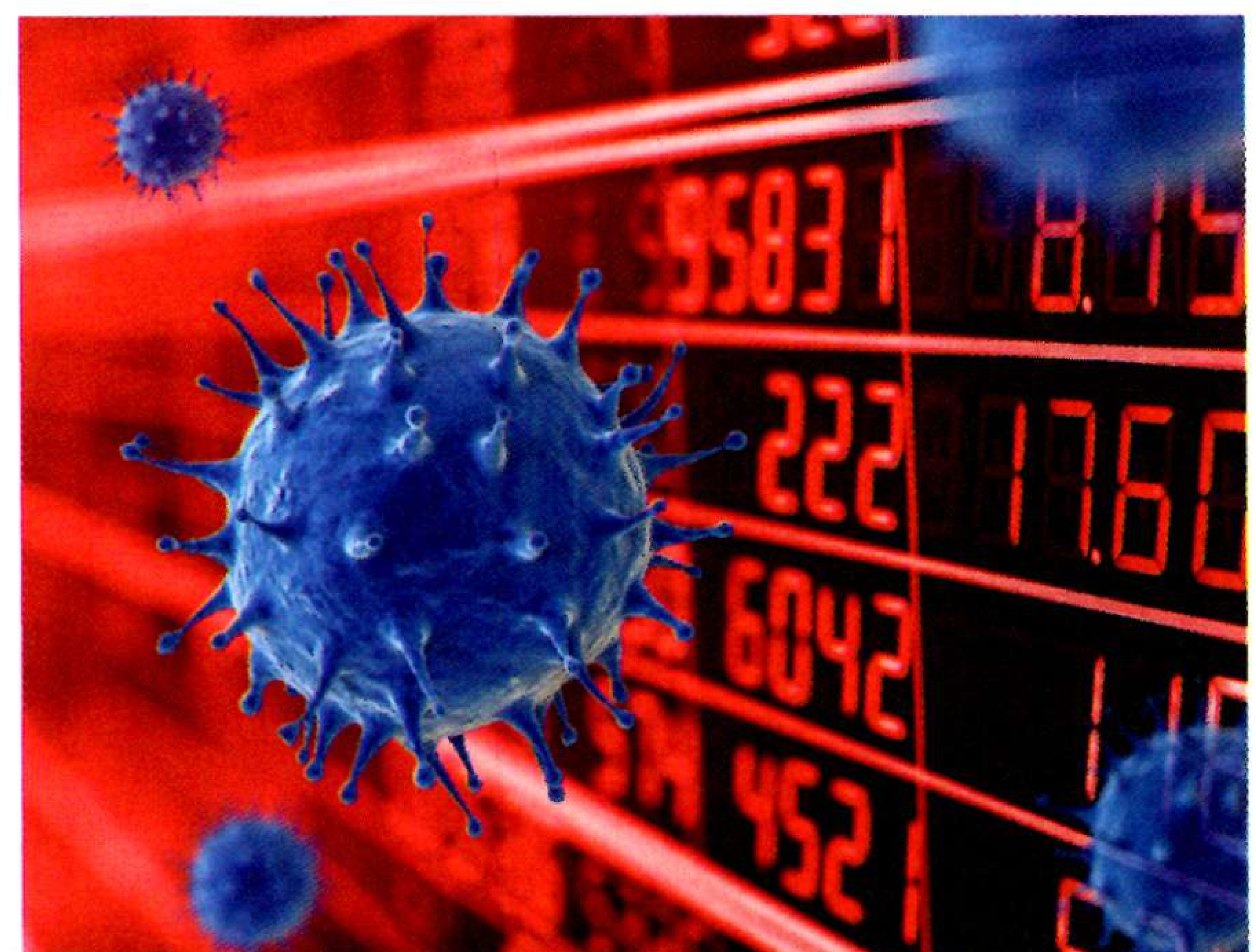
Dans son manuel *Statistiques épidémiologie* (voir la note de lecture en page 23), Thierry Ancelle rappelle la définition usuelle d'une *épidémie* : il s'agit de « *la survenue de cas d'une maladie quelconque, dont le nombre est supérieur au nombre de cas attendus pendant une période de temps donnée et en un lieu donné* ». Cette définition, volontairement floue, nous apprend l'auteur, dépend du type de maladie. « *La survenue de deux cas de variole, en tout endroit du monde, serait à coup sûr considérée comme une épidémie à étudier d'urgence. Pour les maladies "fréquentes", faisant l'objet de surveillance systématique, on exige le dépassement de seuils prédéterminés.* » Quand il s'agit d'un virus inconnu, comme pour le Covid-19, l'exercice est donc périlleux.

En tout cas, contrairement à ce que l'on a pu lire parfois, la définition ne fait pas intervenir de taux de mortalité. Contester le caractère épidémique du phénomène en le justifiant par un nombre de mort inférieur à celui de la grippe saisonnière n'a donc aucun sens.

en bref

Définir un cas

Dans l'étude des épidémies, il est fondamental de repérer les paramètres permettant de définir un cas. La définition doit jongler entre sa *sensibilité* et sa *spécificité* : une définition trop sensible verrait un trop grand nombre de cas pris en compte, y compris ceux de pathologies différentes avec des symptômes semblables. Si la spécificité est trop importante, on passe à côté de certains cas atypiques.



© 123rf / Kitiipong Jirasukhanont

C'est pourquoi on utilise souvent une définition à trois niveaux :

- cas *certain*, qui est une définition très spécifique ;
- cas *probable*, définition intermédiaire ;
- cas *suspect*, qui est une définition très sensible.

Les cas sont habituellement définis de manière assez pointue à l'aide d'opérateurs booléens (« ET », « OU »). Si la maladie est mal connue, on essaye de privilégier la sensibilité afin de recueillir un maximum de cas dont on pourra étudier les profils. Il est toujours possible, au moment de l'analyse, de restreindre ce nombre en éliminant les cas douteux. L'inverse n'est pas possible.

Dans le cas du Covid-19, les trois niveaux de définition se trouvent sur le site de l'OMS. Les cas certains correspondent aux patients testés positifs, les suspects à des pathologies respiratoires aiguës non explicables autrement, les cas probables étant des cas suspects dont les tests n'ont pas permis de conclure. On constate que cette définition produit de fortes disparités dans la qualification des cas asymptomatiques suivant la politique de tests pratiquée dans les différents pays.

par Bernard Ycart

Entre la peste et le choléra

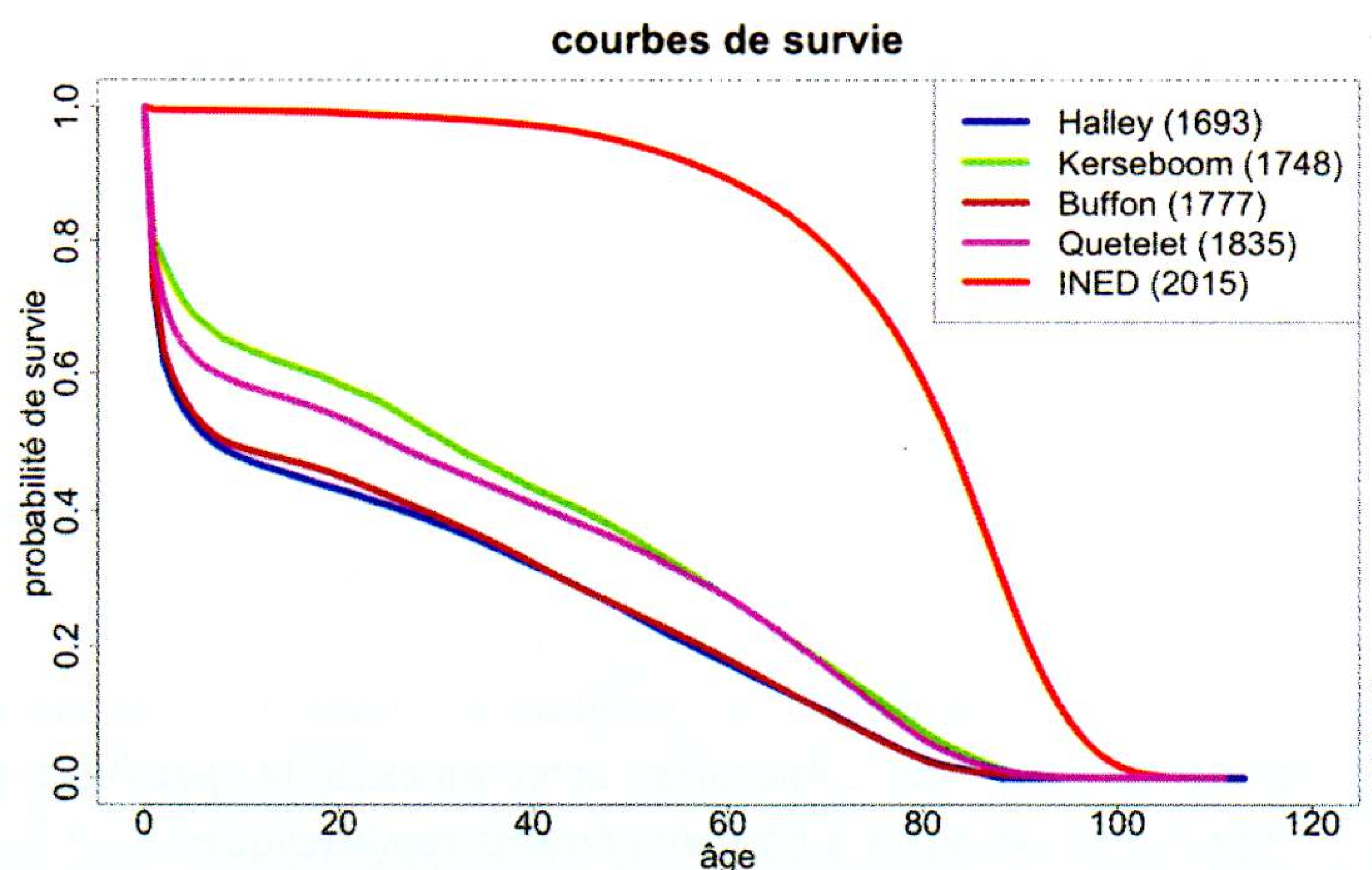
La naissance de l'épidémiologie

Depuis plus de trois siècles, les grandes pandémies ont poussé des statisticiens à mettre en chiffres les données de mortalité et à élaborer des prévisions de décès. En quoi ceci a-t-il permis de réduire l'impact de ces catastrophes ?

Été 1665, une épidémie de peste ravage l'Angleterre : 68 596 morts recensés dans Londres, entre 15 et 20 % de la population. La catastrophe a deux conséquences heureuses pour l'histoire des sciences. L'université de Cambridge ayant renvoyé ses étudiants chez eux, l'un d'eux passe son temps à se promener, à rêvasser et à aligner des chiffres. *« J'ai honte d'avouer le nombre de décimales jusqu'où j'ai poussé ces calculs quand j'en avais le loisir. Vraiment en ce temps-là, je prenais trop de plaisir à ces recherches. »* Il avait 22 ans, et était en train d'inventer l'analyse et la physique modernes : il s'appelait Isaac Newton. L'autre conséquence bénéfique est due à un certain John Graunt (1620–1674), drapier de son état, un *« compagnon plaisant et facétieux »* selon l'un de ses amis. Il a pris l'initiative d'analyser l'information rapportée dans les « bulletins de mortalité » publiés à Londres au fil des épidémies de peste. Il faut dire que celle de 1665 n'était pas la première : il y avait eu 1592 (11 503 morts), 1603 (30 561 morts), 1625 (35 417 morts) et 1636 (10 460 morts). Des registres avaient été tenus, mais personne n'avait eu l'idée avant Graunt d'en extraire des prédictions chiffrées : c'est la naissance de la statistique, appliquée à la démographie.

+ La première table de mortalité

On trouve dans les *Observations sur les bulletins de mortalité*, de Graunt, la toute première table de mortalité de l'histoire. *« Sur cent enfants,* dit-il, *il en meurt 36 dans les six premières années, 24 dans les dix ans qui suivent. »* En effet, soixante pour cent des nouveau-nés n'atteignent pas 16 ans ! La peste n'explique pas tout : il en a toujours été ainsi, et la situation changera peu jusqu'à la moitié du XIX^e siècle. Les courbes suivantes montrent des pourcentages de nouveau-nés survivants en fonction de l'âge. La courbe rouge correspond aux données de la France en 2015 ; la mortalité infantile y est largement inférieure à 1 %. Celle des siècles passés était de l'ordre de 20 % à 1 an, de 50 % à 8 ans. À qui doit-on cette victoire ? À la médecine et aux habitudes d'hygiène qu'elle a su imposer à nos sociétés. Mais des médecins, il y en a eu partout depuis l'Antiquité. Pourquoi a-t-il fallu attendre le XIX^e siècle pour qu'ils deviennent aussi massivement efficaces ? C'est lié, au moins en partie, au développement simultané de la statistique. Les calculs sur la durée de la vie, les recueils de données démographiques ou économiques remontaient au moins au XVII^e siècle. Mais au cours de la première moitié du XIX^e, un phénomène nouveau est apparu : l'« avalanche des chiffres » (voir *Mathématiques et médecine*, Bibliothèque Tangente 58, 2016 et *Mathématiques des assurances*, Bibliothèque Tangente 57, 2016). Dans tous les domaines, on s'est mis à compiler des



Courbes de survie au fil des siècles.
Pour un âge en abscisse, chaque courbe donne en ordonnée une proportion de nouveau-nés qui survivront au-delà de cet âge.

données et à tenter d'en extraire de l'information. La médecine est passée, en quelques générations, des descriptions de cas aux tableaux de nombres. Trois victoires médicales illustrent le rôle de la statistique à ses débuts.

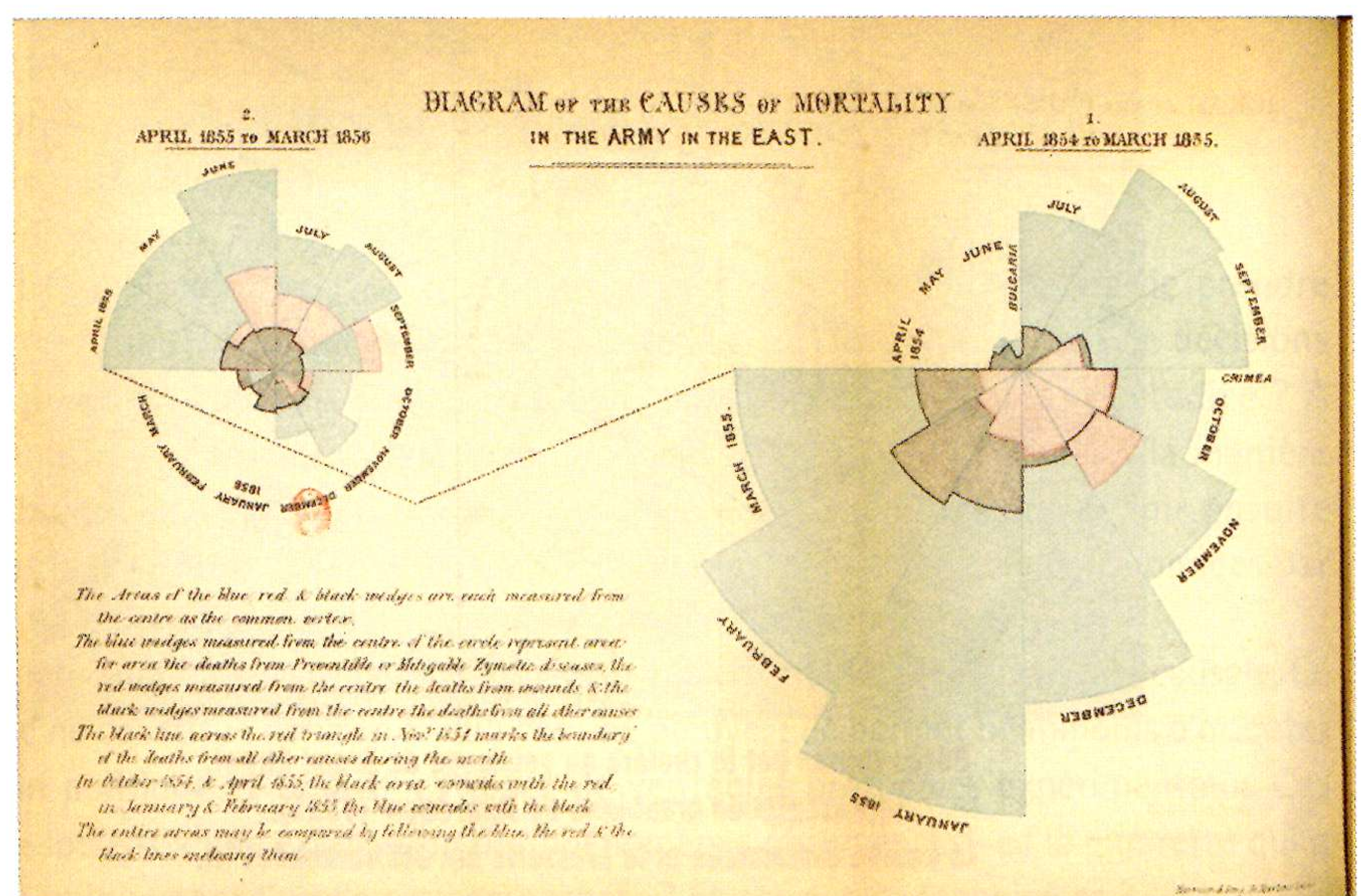
+ Lavez-vous les mains !

La fièvre puerpérale (ou « fièvre de l'accouchement ») était déjà diagnostiquée au temps d'Hippocrate. Le premier à la reconnaître comme une maladie infectieuse fut Alexander Gordon (1752–1799), qui trouva une thérapie : *« La méthode que j'ai trouvée la plus efficace est la saignée abondante, peu après le déclenchement de la maladie. [...] Quand je prélevais seulement dix ou douze onces de sang de ma patiente, elle mourait toujours. Mais quand j'avais le courage de prendre vingt ou vingt-quatre onces en une seule saignée, au commencement de la maladie, la patiente guérissait à coup sûr. »*
Oui, il s'agit bien, pour les guérir, d'ôter plus d'un demi-litre de sang à des patientes déjà affaiblies par leur accouchement et le début de l'infection ! Au XIX^e siècle, le point de vue change. Voici ce qu'on lit dans un livre sur les maternités, datant de 1866 : *« Ainsi, sur 888 312 femmes accouchées dans des maternités ou dans les hôpitaux, 30 594 sont mortes. Sur 934 781 accouchements opérés en ville, [...] 4 405 ont été suivis de mort. La mortalité a été dans le premier cas de 1 femme sur 29 accouchées ; elle n'a été dans le second cas que de 1 sur 212. »*

Celui qui a compris que la surmortalité des accouchées dans les hôpitaux pouvait être réduite par un minimum d'hygiène s'appelle Ignaz Philippe Semmelweis (1818–1865). Il a osé imposer aux internes de se laver les mains entre une autopsie et un accouchement ! En conséquence, il a été renvoyé de l'hôpital de Vienne.

« Les diagrammes sont d'une grande utilité pour illustrer certaines questions de statistique démographique, car ils transmettent par les yeux des idées qui sont moins faciles à appréhender quand elles sont contenues dans des chiffres. [...] Cela se voit dans le diagramme qui représente les causes de mortalité de l'armée à l'Est. C'était un lieu commun que la grande mortalité des armées provenait des blessures reçues au combat. Les chiffres inexorables reçus de l'armée ont dissipé ce préjugé à jamais. »

Voici les diagrammes dont elle parle. La disproportion entre les morts par maladie (en bleu) et les morts par blessure (en rose) est telle que les tableaux de chiffres sont inutiles : les morts par maladie deviennent soudain insupportables.



© Bibliothèque nationale de France, 2014

Diagramme des causes de mortalité dans l'armée à l'est.
Ce diagramme, conçu par Florence Nightingale en 1858, représente des secteurs mensuels de surface proportionnelle au nombre de morts par maladies contagieuses (en bleu), blessures (en rose), autres causes (en noir).

+ L'ange de la nuit

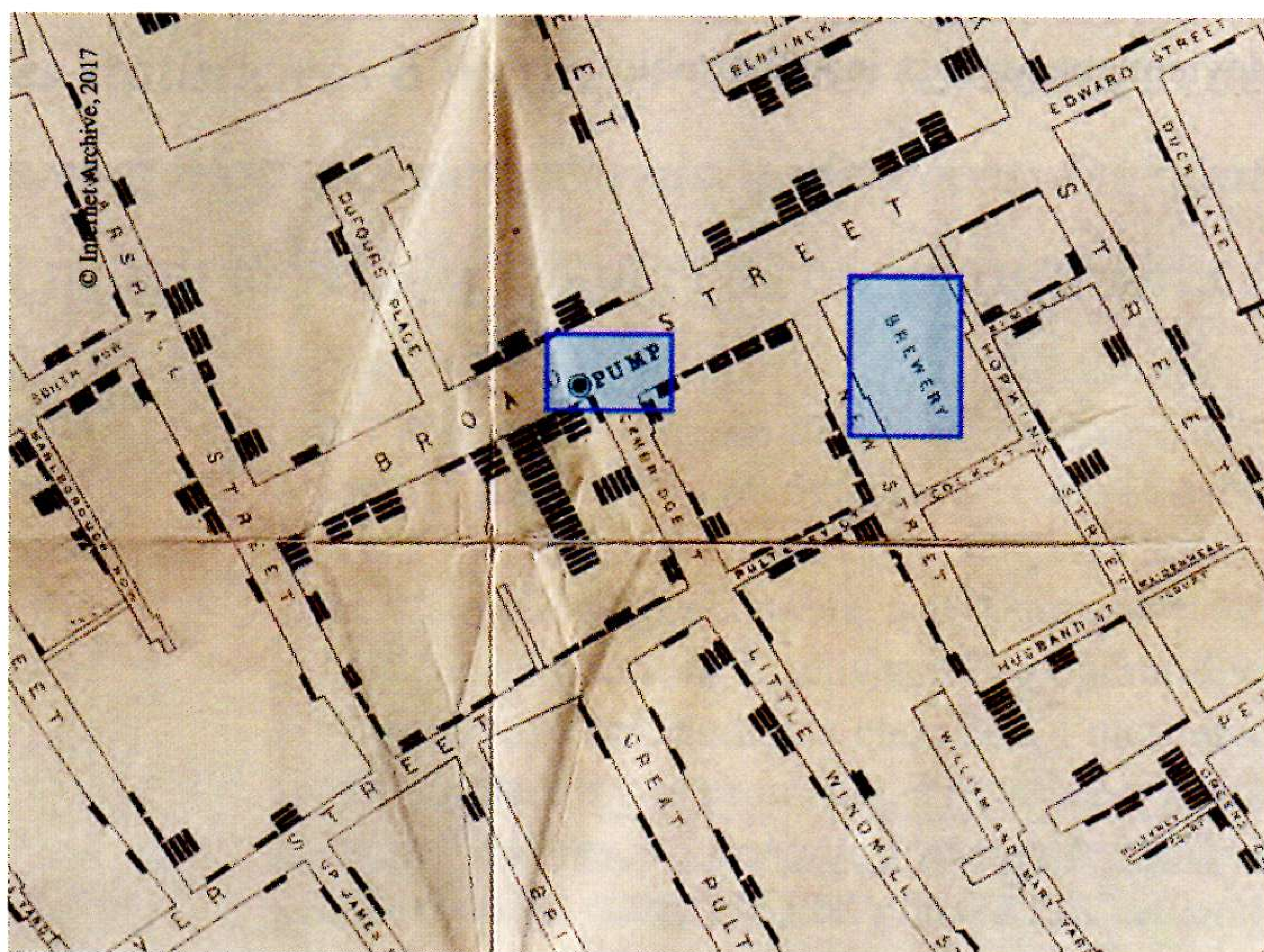
Peu de femmes dans le monde ont une statue, et peu de statues sont aussi méritées que celle de Florence Nightingale (1820–1910). Elle est la Dame à la lampe, cette héroïne de la guerre de Crimée qui a soulagé les souffrances de milliers de soldats britanniques, définissant pour la postérité les standards du métier d'infirmière. Elle était aussi une des premières statisticiennes, bien convaincue du pouvoir des chiffres et des figures.


© National Portrait Gallery

The Mission of Mercy: Florence Nightingale receiving the Wounded at Scutari. **Jerry Barrett, vers 1906.**

+ « Ils ne buvaient jamais d'eau »

Les grandes épidémies de peste passées, l'Europe est confrontée, à partir des années 1830, à un nouveau fléau : le choléra. En 1849, une épidémie cause 19 184 décès à Paris, pour une population d'environ un million d'habitants. En Angleterre, ce sont 53 293 morts. Comme à Paris, la répartition est extrêmement inégale. Est-ce un manque d'hygiène des populations les plus pauvres ? Est-ce l'air vicié qui véhicule les miasmes ? Un médecin londonien, John Snow (1813–1858), à force de collecter les cas de décès, a l'idée de les représenter par des petits rectangles sur un plan de Londres.



Décès causés par le choléra au voisinage de Broad Street, représentation graphique de John Snow (1855). La pompe contaminée et la brasserie ont été surlignées ici.

« Je m'aperçus que presque toutes les morts avaient eu lieu près de la pompe de Broad Street. Il n'y avait que dix morts clairement plus proches d'une autre pompe. Dans cinq de ces cas, les gens me dirent qu'ils préféraient aller à la pompe de Broad Street. Dans trois autres cas, les défunts étaient des enfants qui allaient à l'école proche de la pompe de Broad Street. On savait que deux d'entre eux avaient bu de cette eau, et les parents du troisième pensaient que c'était probable pour lui aussi. »

Une partie de la rue restait curieusement immune : *« Il y a une brasserie dans Broad Street, proche de la pompe. Réalisant que personne parmi les employés n'était mort du choléra, j'allai voir Monsieur Huggins, le propriétaire. Il me confirma qu'il y avait plus de soixante-dix travailleurs dans la brasserie, et qu'aucun d'entre eux n'avait eu le choléra. Les hommes disposaient d'une certaine quantité de bière qui leur était allouée, et Monsieur Huggins pensait qu'ils ne buvaient jamais d'eau, en tout cas qu'ils n'utilisaient jamais la pompe dans la rue. »*

La poignée de la pompe de Broad Street est retirée, et l'épidémie cesse. L'origine de la contamination est démontrée.

+ Rationnel et émotionnel

La statistique n'a pas gagné la bataille des courbes de mortalité à elle seule. Ce sont les médecins qui ont fait reculer les maladies, en utilisant parfois des statistiques. Grâce à leur engagement et leurs innovations, petit à petit, la peste et le choléra ont rejoint dans l'imaginaire collectif ces autres maladies terribles que nous ne craignons plus : le typhus, la fièvre jaune, la poliomyélite, la tuberculose… Plus exactement, que « nous, Européens » ne craignons plus, parce que grâce à notre système de santé, elles ne nous concernent plus. À l'échelle planétaire, seule la variole peut être considérée comme totalement vaincue. En plus de ces maladies plus ou moins maîtrisées, les pandémies n'ont pas cessé avec le XIX^{e} siècle. Trois épidémies de grippe ont tué massivement au siècle dernier : la grippe espagnole (20 millions de morts en 1918–1920), la grippe asiatique (2 millions de morts en 1956–1958) et la grippe de Hong-Kong (1 million de morts en 1968–1970).

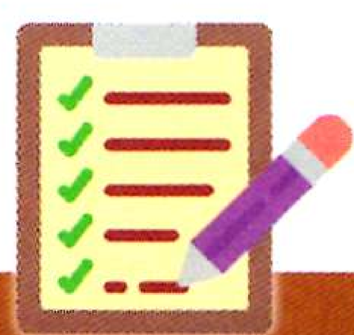
L'épidémie actuelle est très loin des pandémies du passé : elle provoquera beaucoup moins de morts, elle aura épargné les enfants… Mais un statisticien se doit de s'interroger sur la diversité des politiques adoptées d'un pays à l'autre, et sur l'hétérogénéité des chiffres annoncés par les media : proportions de contaminés, taux de mortalité… Est-on vraiment sûrs que toutes les décisions sont prises sur des bases rationnelles (médicales, statistiques…), plutôt que sur des bases émotionnelles (pression des media et des réseaux sociaux…) ? Imaginez qu'un étudiant prénommé Isaac, confiné chez lui, ait envie de rêvasser : espérons qu'il aura le courage de se déconnecter de ses écrans pour se poser, réfléchir et faire des calculs !

B.Y.

Références

- *Visualisation des données : sachez les mettre en scène !* Jonathan Fontanel, *Tangente* 181, 2018.
- *Les mathématiques sociales.* Pour la Science, dossier 24, 1999.
- Le site « Histoires de Mathématiques » (Bernard Ycart, **https://hist-math.fr**) propose des séquences audio d'environ vingt minutes sur des thèmes d'histoire ou d'épistémologie.

par Cassiopée Cunibil



Les enquêtes étiologiques

Une *enquête étiologique* s'intéresse au lien entre la survenue d'une maladie et un facteur de risque. Il s'agit d'une enquête d'observation sur les habitudes des individus composants la population étudiée.

La méthodologie d'une enquête étiologique ne doit pas être confondue avec celle des *études expérimentales* ou celle des *essais thérapeutiques*. Elle ne peut donc pas démontrer une relation causale mais contribue à orienter une suspicion. Il existe plusieurs types d'enquêtes étiologiques, dont l'*enquête de cohorte* (voir l'exemple simplifié ci-contre).

Fumer protège-t-il du virus ?

Le tabagisme est-il un facteur aggravant lorsque l'on est atteint par le covid-19 ? La population étudiée dans cet exemple est un ensemble de personne testées positives au virus. Les cas graves seront les individus admis en réanimation ou décédés. Le facteur étudié amène à définir deux catégories : les fumeurs et les non-fumeurs. Les données peuvent être présentées dans le tableau suivant.

	Population étudiée	Complications	Taux d'incidence
Fumeurs	N_F	C_F	$I_F = C_F / M_F$
Non-fumeurs	N_f	C_f	$I_f = C_f / M_f$

Dans la dernière colonne, on calcule le taux d'incidence de complications pour chaque catégorie. Ce taux est une valeur entre 0 et 1. Il est assimilable au risque de survenue de complications.

Le *risque relatif* (RR) peut alors être calculé : $RR = I_f / I_F$. La valeur obtenue peut être interprétée comme suit :

- RR est « proche » de 1 : il n'y a pas de relation ;
- RR > 1 : le tabagisme est un facteur de risque ;
- RR < 1 : le tabagisme est un facteur protecteur.

Cet exemple simple montre bien toutes les pincettes qu'il est nécessaire de prendre pour l'interprétation des résultats, tant le processus de calcul va dépendre de décisions arbitraires prises en amont. Comment va-t-on sélectionner la population étudiée ? À l'échelle d'une ville, d'un pays, d'un réseau d'Ehpad ? Ce choix peut changer la manière de comptabiliser les complications, ou introduire des biais. Comment définir ensuite précisément la catégorie des « fumeurs » ? Par le nombre de cigarettes consommées par jour, par le type de cigarette, par le nombre d'années de tabagisme ?

Par ailleurs, une relation mathématique forte peut également être réelle mais non causale. Ce type d'étude ne constitue donc en aucun cas une preuve. Elle permet néanmoins d'orienter une décision politique et la mise en place de véritables protocoles expérimentaux. Ces derniers s'associent à une explication des phénomènes observés. Est-ce la cigarette qui a un effet, ou uniquement l'un de ses composants ? Et par quels mécanismes ?

note de lecture

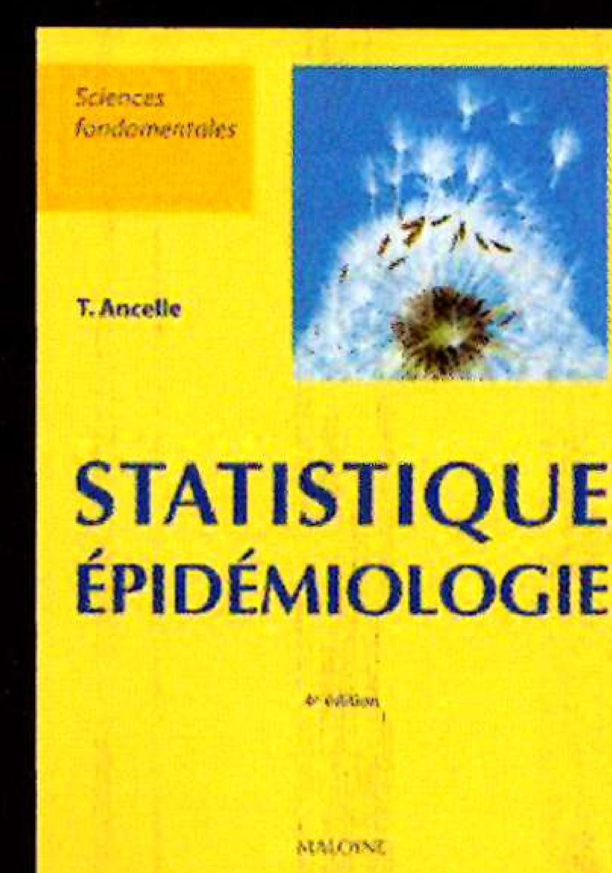
Comprendre les enjeux de l'épidémiologie

Les premières parties de ce manuel de 2002 régulièrement réédité et actualisé présentent les outils statistiques appliqués à des exemples issus du domaine médical. L'épidémiologie fait l'objet d'une quatrième partie. Après une présentation des différents indicateurs de mesure utilisés, l'auteur rappelle la méthodologie des enquêtes épidémiologiques, les outils mathématiques employés, jusqu'à l'étude de la performance d'une technique médicale comme un test de dépistage.

Les explications sont claires et bien illustrées par des exemples numériques. L'auteur, à la fois maître de conférence et praticien hospitalier, n'hésite pas à évoquer les contraintes de terrain et les choix qu'elles peuvent entraîner dans la méthodologie employée. Même pour un lecteur ayant peu de chances d'être professionnellement confronté à ce type de calculs, le livre a le mérite de fixer les choses du point de vue des termes et des pratiques, apportant des outils pour décoder les informations et relancer la réflexion.

L'auteur possède également une chaîne Youtube (« Thierry Ancelle ») sur laquelle il diffuse ses cours d'épidémiologie. C.C.

Statistique épidémiologie. Thierry Ancelle, Maloine, 2017 pour la dernière édition, 342 pages, 40 euros.



par J. Bair et D. Justens

Covid-19 :
les maths à la rescousse

Quel peut être l'apport des modèles épidémiologiques dans le cas d'une pandémie comme celle du Covid-19 ? En quantifiant et expliquant leurs conséquences directes sur la propagation, les modèles peuvent-ils justifier les mesures, difficiles pour les populations, qui ont été prises ?


© 123RF / Radila Radilova

La puissance du raisonnement mathématique se révèle parfois d'un réconfort solide, même dans les domaines les plus inattendus. Face aux ravages du Covid-19, en des temps difficiles et incertains, une représentation rationnelle, fondée sur des hypothèses réalistes, apporte des réponses argumentées à certaines des questions que chacun se pose. Même si personne ne peut appréhender toutes les conséquences sociétales et économiques de la pandémie qui sévit en ce moment, le recours à la modélisation du phénomène s'avère d'un apport considérable, en expliquant ou en justifiant certaines mesures prises, comme le confinement ou la mise en quarantaine. Certes, le recours à la modélisation, et donc à une forme de simplification, se fait toujours par le biais d'une série d'hypothèses simplificatrices dont la validité n'est pas nécessairement acquise. Il convient d'en tenir compte au moment des conclusions et lors de la phase de décision. C'est encore plus vrai pour un phénomène épidémiologique comme le Covid-19, pour lequel des données fiables ou exhaustives sont encore aujourd'hui pratiquement indisponibles.

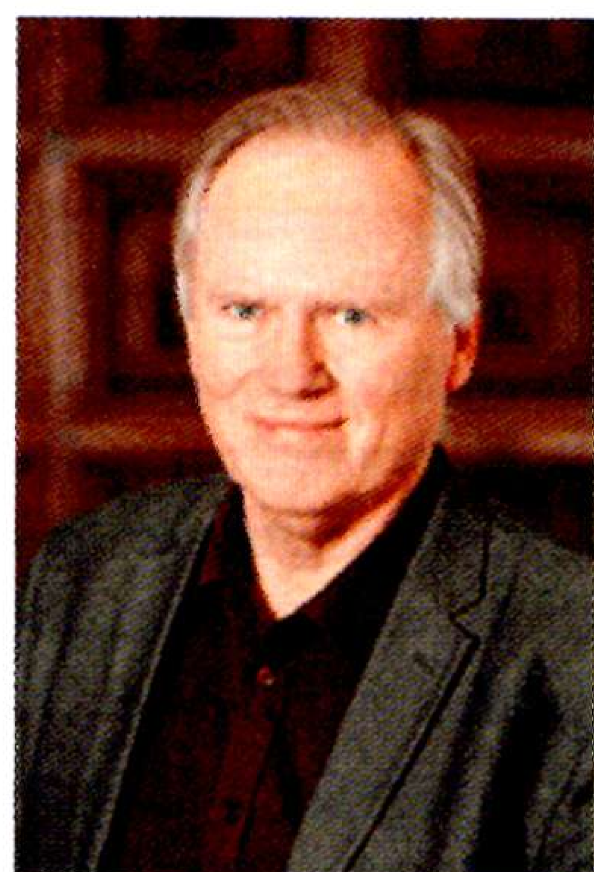
+ Le modèle SIR

Plusieurs modèles épidémiologiques ont été développés à ce jour. Les plus élémentaires sont les *modèles compartimentaux*, qui apportent déjà un éclairage particulièrement intéressant sur certains aspects du phénomène pandémique que nous vivons en ce moment. Le modèle SIR appartient à cette catégorie.
Considérons un groupe d'individus constituant une certaine population P d'effectif n, avec n « grand ». Dans un premier temps, on suppose la totale absence d'immunité initiale dans P. C'est bien le cas en ce qui concerne le Covid-19 : aucun vaccin n'était déjà disponible au moment de son apparition, et les systèmes immunitaires des personnes concernées, non confrontées au virus nouveau, n'avaient pas encore été à même de réagir. On suppose aussi tous les individus « semblables ». Cette hypothèse n'est évidemment pas vérifiée en pratique mais, le raisonnement se faisant sur une population large, un traitement en moyenne ne peut être inintéressant.

On partage la population en trois groupes. Il y a d'une part les personnes saines, S (comme « susceptibles »), d'autre part les personnes infectées, I (comme « *infectious* »). Enfin, il y a le groupe des personnes guéries, R (comme « *recovered* »). Le tout donne naissance à l'acronyme SIR.
Le compartimentage peut évidemment être plus subtil. On peut en effet ajouter une catégorie de décédés, D (comme « *dead* ») et un groupe des personnes infectées mises en quarantaine, Q, qui, de ce fait, n'ont plus d'action négative sur la population saine. Dans un premier temps, il est surtout question de visualiser l'évolution de la situation des infections lorsque aucune mesure n'est prise et que l'on laisse le virus se propager librement.

Les modèles SIR peuvent être discrets ou continus. Dans un cadre discret, on relève, toutes les unités de temps (jours ou semaines), les états des différents compartiments. À l'instant 0, la répartition de la population est supposée connue, avec S de cardinal $n - 1$, I contenant 1 individu et R vide. On suppose alors qu'à chaque intervalle de temps, tout individu infecté peut contaminer toute personne du compartiment S avec une certaine probabilité p. Après chaque unité de temps, un individu infecté se trouve guéri (ou mort) et passe donc de I à R (ou à

D). Le modèle est donc stochastique et peut potentiellement déboucher sur un grand nombre de cas de figure. Pour rendre compte de l'évolution des compartiments, l'Institut international de la statistique (ISI, organisation créée en 1885 et indépendante de tout gouvernement) a diffusé, à l'attention de tous ses membres, un excellent exposé sur le sujet réalisé par le professeur Tom Britton (Université de Stockholm) et disponible en ligne. Ce statisticien a mis en place un processus de simulations de grande ampleur, prenant en compte différentes valeurs du couple (n, p). L'un des paramètres du modèle va se révéler fondamental au niveau des conclusions tirées : c'est le *taux de reproduction de base*, à savoir, le nombre de personnes de P que chaque personne malade peut infecter. Britton estime ce paramètre au départ par la relation approximative $R_0 \approx (n-1)p \approx np$, en jouant sur la taille de P d'une part, sur la petitesse de p d'autre part.

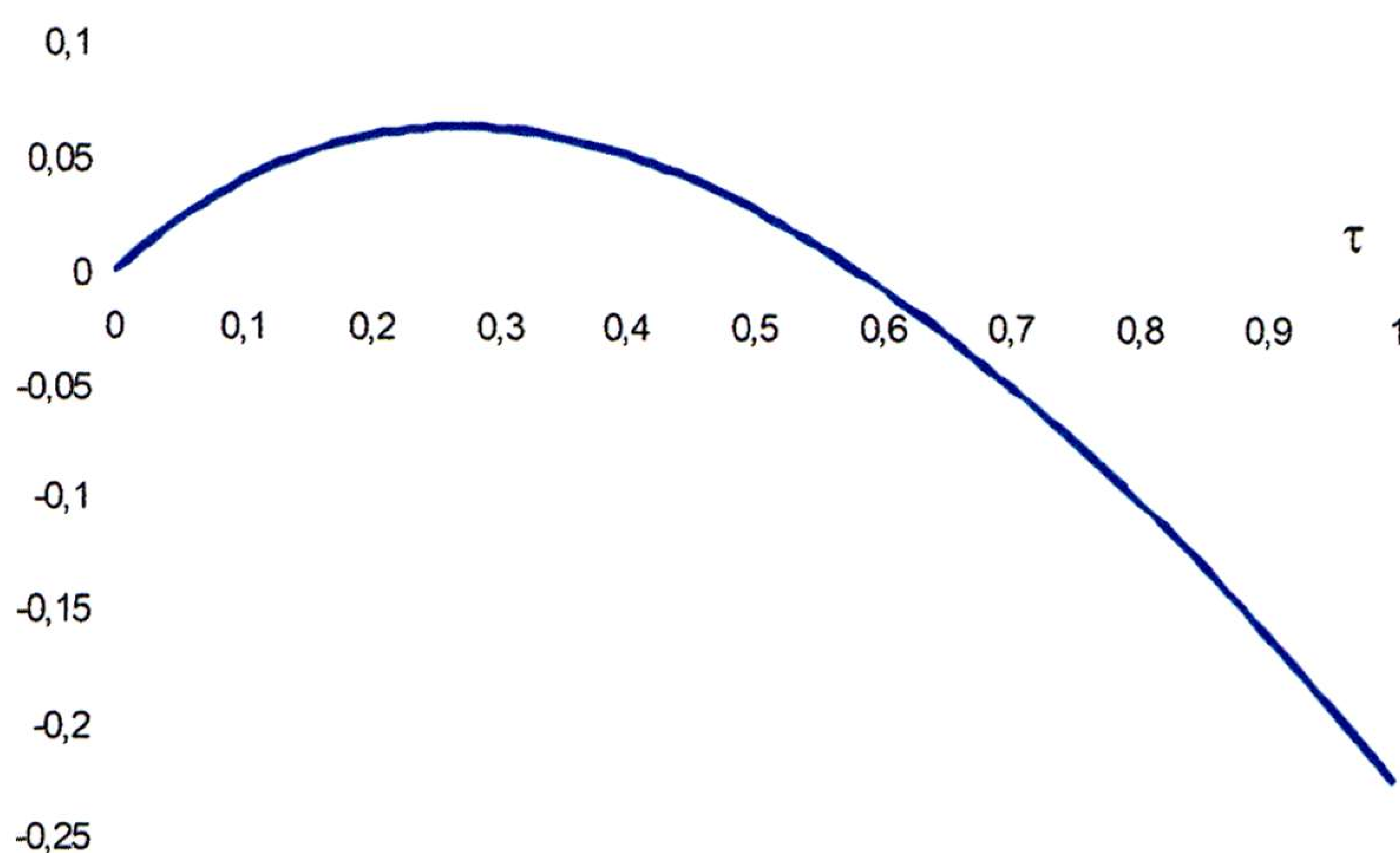

Le mathématicien Tom Britton.

Deux cas de figure majeurs vont se présenter. Lorsque R_0 est inférieur ou égal à 1, aucune épidémie ne se déclare. Le taux de personnes contaminées ne dépasse jamais 10 %. Par contre, dès que le taux de reproduction de base R_0 dépasse 1, deux scénarios apparaissent. Soit le virus disparaît rapidement, contaminant un petit nombre d'individus (moins de 10 %), soit un pourcentage critique de contaminés est observé. Ainsi, pour $R_0 = 1{,}5$, on observe, dans une grande quantité de simulations, un taux de contamination voisin de 60 %. Par contre, des valeurs intermédiaires entre 10 et 50 % de contamination ne sont jamais observées. Ce phénomène peut s'expliquer. En effet, notons τ le taux final de personnes infectées par la pandémie. Le nombre total d'individus ayant transité dans la catégorie I est donc égal à $n\tau$. La proportion non infectée par le virus dans la population est évidemment $1-\tau$. Dans le cadre du modèle, on peut voir cette quantité comme une probabilité, en fait la probabilité de n'avoir pas été infecté par les $n\tau$ individus eux-mêmes porteurs du virus durant toute la durée de l'épidémie. Si les contaminations sont des évènements indépendants, on peut noter $1-\tau = (1-p)^{n\tau}$.

Il reste encore à remplacer p par sa valeur induite à partir du taux de reproduction de base estimé, à savoir $p = R_0/n$. On obtient donc la relation $1-\tau = \left(1-\frac{R_0}{n}\right)^{n\tau}$, qui possède une limite bien connue lorsque n tend vers l'infini, $\exp(-R_0\tau)$.

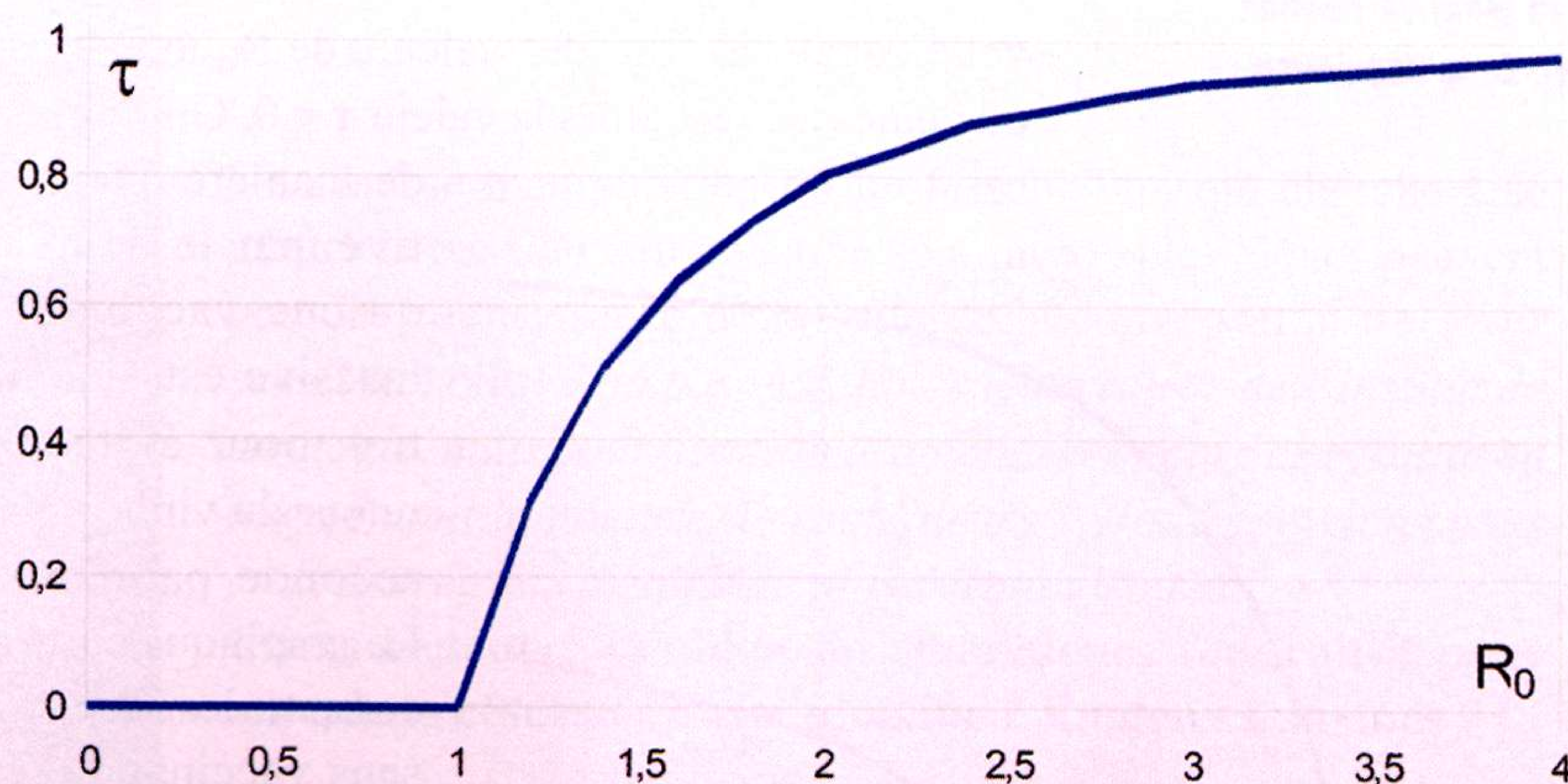
+ L'estimation du R_0

L'équation à résoudre est donc $1-\tau-\exp(-R_0\tau)=0$. Notons $f(\tau)$ le membre de gauche. L'équation possède toujours la solution triviale $\tau = 0$. C'est d'ailleurs la seule solution pour toute valeur de R_0 inférieure ou égale à 1. Par contre, pour des valeurs R_0 strictement supérieures à 1, une deuxième solution positive apparaît, comme on le voit sur le graphique suivant, qui représente la fonction $f(\tau)$ correspondant à la valeur $R_0 = 1{,}5$.



Représentation de la fonction f pour $R_0 = 1{,}5$.

La seconde solution ($\tau \approx 58$ %) est en parfait accord avec les résultats observés lors de la simulation. Il n'y a pas de forme explicite pour la solution générale mais les calculs numériques se font aisément et livrent le graphique suivant, donnant une estimation du taux de contamination τ de la population en fonction du taux de reproduction de base R_0. La croissance est « rapide » dès que R_0 s'éloigne de la valeur pivot 1. Dans le cas du Covid-19, diverses sources estiment la valeur du paramètre R_0 entre 2 et 2,5, ce qui, sans réaction de la population et prises de mesures préventives, laisse entrevoir un taux de contamination de l'ordre de 80 %.



Estimation de τ en fonction de R_0.

Le modèle continu

Le modèle SIR se prête également à une description continue. La vitesse à laquelle le virus se propage rend cette description également intéressante. Notons $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ les fonctions quantifiant les effectifs des trois groupes S, I et R à un instant $t \geq 0$. Pour une population de taille n, on pose $\frac{dS}{dt}(t) = -\beta \frac{S(t)I(t)}{n}$.

En effet, les variations de population saine (*via* le nombre de nouveaux malades) sont proportionnelles à la population saine et à la population d'infectés. La propagation se fait au taux β.

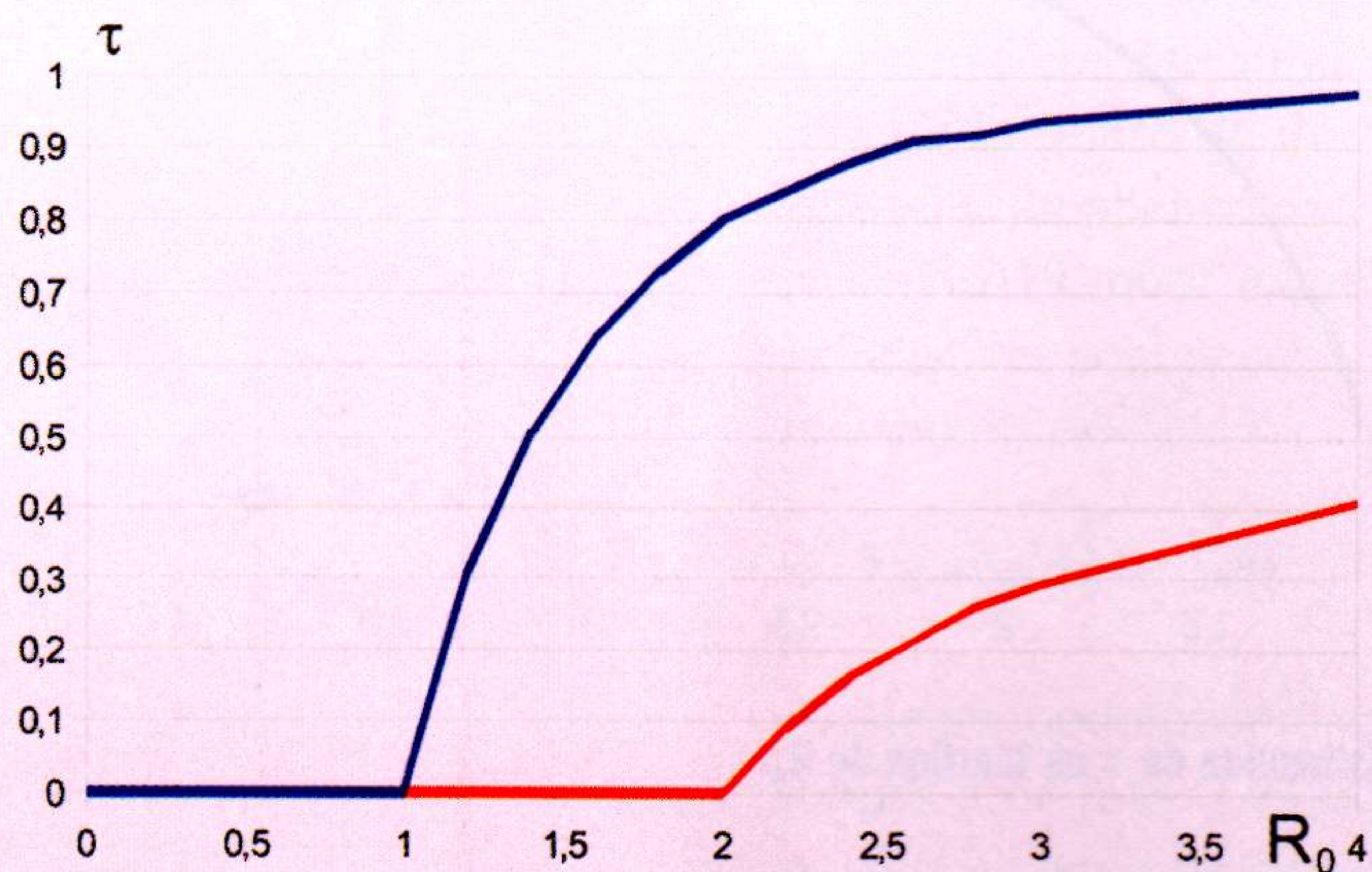
De même, on suppose que le nombre de nouveaux guéris sera une fraction du nombre d'infectés : $\frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t)$.

Enfin, la variation du nombre d'infectés sera affectée positivement par l'apport de nouveaux malades et négativement par la proportion de guéris : $\frac{dI}{dt}(t) = \beta \frac{S(t)I(t)}{n} - \gamma I(t)$.

Le modèle est non linéaire mais des solutions numériques peuvent être obtenues par simulation. En sommant les trois équations différentielles, on obtient 0, ce qui implique que la somme S + R + I est, à chaque instant $t \geq 0$, constante et égale à la taille n de la population. Ceci implique également qu'il suffit de résoudre deux des trois équations d'évolution. On introduit également un *taux de reproduction de base*, qui est estimé à partir du ratio β / γ, et que l'on peut interpréter comme le rapport entre taux de contamination et taux de guérison. Des solutions explicites pour $S(t)$ peuvent alors être obtenues, comme dans le cas discret.

+ L'effet des mesures

La situation est évidemment totalement différente dès que la population touchée comprend une partie d'individus soit immunes, soit vaccinés. Supposons ainsi qu'une proportion q de la population soit immunisée ou vaccinée. Seule la proportion $1 - q$ de la population pourra être soumise à contamination et subira les effets des individus malades. Notre équation devient à présent $1 - \tau = q + (1 - q)\exp(-R_0\tau)$. Imaginons à présent que la moitié de la population soit vaccinée ($q = 1/2$). La seule solution à la nouvelle équation, pour des valeurs de R_0 inférieures ou égales à 2, est alors la valeur $\tau = 0$. On retrouve de manière quantitative, par le modèle, qu'une vaccination massive est la solution pour éviter un retour du virus et une seconde pandémie. Le graphique suivant compare les situations sans vaccination (en bleu) et avec vaccination (en rouge) pour $q = 0{,}5$.



Évolution de τ en fonction de R_0, avec (en rouge) et sans (en bleu) vaccination massive de la population.

Nous n'en sommes pas encore là. Alors ? Que faire pour lutter contre ce qui paraît à première vue inévitable ? Il semble réaliste de supposer que le taux de reproduction basique doit être proportionnel à la probabilité de transmission par contact. C'est le cas dans le modèle SIR précédent : $R_0 = np$. On peut agir sur cette probabilité en portant des masques, en se lavant les mains, toutes actions qui auront un effet sur le facteur p.

Mais le taux de reproduction dépend tout aussi évidemment du nombre de contacts de chaque individu avec tout autre. On peut donc jouer une seconde fois sur le paramètre R_0 en confinant une grande partie de la population à domicile, en interdisant les réunions et rassemblements publics.

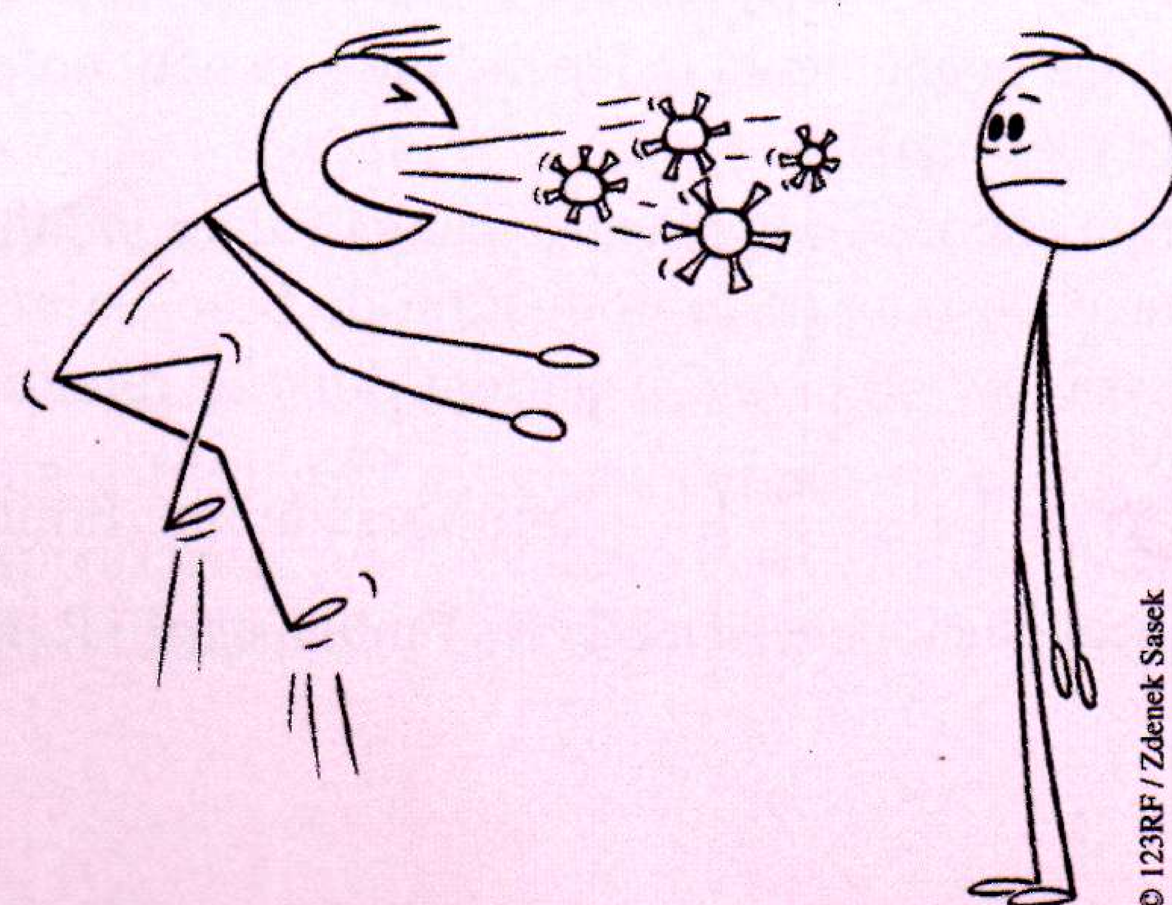
D'autres facteurs interviennent également, comme le taux de dépistage dans la population. Dans le cas du Covid-19, certains pays procèdent à un dépistage massif, comme l'Allemagne. D'autres, comme la Belgique, n'ont testé dans les premières semaines que les patients dans un état préoccupant et présentant les symptômes de la maladie, ou encore le personnel soignant… à condition qu'il soit fiévreux ! La taille des populations S et I est donc inconnue. La détermination d'un taux de décès crédible est donc impossible. Le compartiment R reprend donc aussi bien les personnes guéries que les personnes décédées. Des statistiques ultérieures permettront sans doute de quantifier correctement le taux de décès. On constate ici l'intérêt de démarches comme celle du projet Polymath (voir en page 5).

Que retenir de tout cela ? Déjà, que des mesures adaptées peuvent être prises et qu'elles doivent jouer sur le taux de reproduction de base. L'intérêt des modèles mathématiques est là : ils quantifient les conséquences de nos actions. En tant qu'outils d'aide à la décision, ils justifient certaines mesures difficiles. Ils nous rassurent enfin quant à l'avenir. Que demander de plus ?

J.B. & D.J.

Références

- « Les mathématiques de l'épidémie de Coronavirus ». Conférence de Tom Britton, 36 mn, 2020, disponible en ligne.
- *Mathématiques et biologie*. Bibliothèque Tangente 42, 2011.



Le rhume-qui-rend-encore-plus-bête

L'Institut intergalactique est le temple de l'excellence, où exerce le redouté professeur Phi. Une épidémie sévit sur le campus et oblige élèves et enseignants à des mesures sanitaires strictes.

par Kylie Ravera

nouvelle

Le professeur Phi promène un regard courroucé sur sa classe. Ce n'est pas inhabituel en soi, l'enseignant le plus célèbre de l'Institut intergalactique tenant pour acquis l'existence de raisons immuables de se montrer insatisfait de ses étudiants. La nouveauté de la situation réside plutôt dans le fait que le regard soit adressé à travers la vitre d'un scaphandre hermétique, ce qui a pour effet d'en atténuer quelque peu la portée. D'autant que les étudiants sont eux-mêmes munis de scaphandres identiques, censés les protéger du dernier virus qui fait des ravages sur le campus – celui du rhume-qui-rend-encore-plus-bête, une version plus corsée du rhume-qui-rend-très-très-bête. Contrairement à ce dernier, pour lequel un vaccin a été mis au point assez facilement, la solution se fait désirer.

« Le professeur Phi est attendu en urgence par le directeur de l'Institut dans son bureau » résonne une voix synthétique.

Le professeur quitte sa classe en maugréant sur les gouttes d'eau qui font déborder les vases et sur les scaphandres qui grattent à la base du cou, autant d'informations qui n'échappent pas à ses élèves puisqu'il a omis de couper son micro. Les jeunes gens peuvent ainsi prendre connaissance de la discussion qui a lieu entre le directeur de l'Institut, leur enseignant, et le responsable du Laboratoire intergalactique de virologie. Ce dernier explique la raison de sa venue : *« Nous allons recevoir dans la journée dix-huit vaccins candidats, et nous souhaiterions déterminer lequel est le plus efficace le plus rapidement possible. Nous avons pour cela à notre disposition huit simulateurs qui permettent de comparer les vaccins deux à deux pour trouver lequel est le plus performant. Mais chaque procédure prenant une semaine, nous voudrions optimiser le processus global pour lancer rapidement la production massive du meilleur vaccin. Professeur Phi, auriez-vous une solution à nous proposer ? Chaque laboratoire nous a livré un premier lot d'une dizaine de vaccins, nous pouvons donc tester en parallèle plusieurs d'entre eux. »*


© serikbaib - tock.adobe.com

C'est à ce moment que le professeur se rend compte qu'il a oublié de couper son micro et qu'il y remédie. Dans la classe, Bêta hausse les épaules et s'adresse à sa voisine Epsilon : *« Je ne comprends pas pourquoi on fait appel à l'expertise de Phi pour résoudre ce problème, cela me paraît assez simple : il suffit de commencer par comparer seize vaccins deux à deux dans les huit simulateurs. On garde les meilleurs à chaque fois, il nous en reste alors dix en course. On relance cinq tests à l'issue desquels il ne restera plus que cinq candidats. On en compare alors quatre, il reste les deux meilleurs et celui qu'on n'a pas testé. Deux tests de plus, que l'on peut lancer en parallèle, permettent de comparer les trois derniers, et on a la réponse.*

– Tout cela prendrait quatre semaines, réplique Epsilon. On peut en gagner une à mon avis. »

Et vous, chers lecteurs, voyez-vous comment améliorer ce résultat pour déterminer en trois semaines, au moyen des huit simulateurs, quel est le meilleur des dix-huit vaccins ?

+ Augmenter les moyens et gagner du temps

Une fausse manipulation du professeur Phi, qui cherche à se gratter la base du cou, réactive son micro et les élèves peuvent prendre connaissance de la suite de la conversation : *« Trois semaines, c'est déjà pas mal, lance le directeur de l'Institut de virologie, mais pourrions-nous améliorer encore ce résultat en augmentant le nombre de simulateurs ? Nous pourrions nous en procurer une dizaine de plus éventuellement… »*

Chers lecteurs, combien de simulateurs faudrait-il pour obtenir le résultat en une semaine ? En deux semaines ?

Solutions en page 52



par Anne Boyé

La nouvelle algèbre de Monsieur Viète

François Viète fait partie de ces savants célèbres pour leur apport considérable aux mathématiques. Certes, il n'est pas l'inventeur de l'algèbre, mais ses contributions ont fait faire un bond spectaculaire à cette discipline.

Au IX^e siècle, al-Khwarizmi a rédigé un texte sur la résolution des équations, qui peut être considéré comme le premier traité d'algèbre. C'est son nom qui, déformé, interprété, donna naissance au mot « algorithme », et c'est l'*al-jabr*, l'une de ses techniques de résolution d'équations, qui donna naissance au mot « algèbre ». Dans ses écrits, pas de lettre, pas de symbole, et c'est cependant « de l'algèbre ». Les procédures sont justifiées par une démonstration géométrique. C'est ce pas de géant qu'il va falloir franchir, entre l'algèbre rhétorique et l'algèbre symbolique. François Viète est celui qui a permis ce saut et ouvert la voie aux successeurs, parmi lesquels René Descartes (1596–1650). En 1630, pour favoriser la diffusion de cette invention, le Sieur de Vaulezard traduira du latin l'œuvre majeure de Viète dans ce domaine, *In Artem Analyticem Isagoge* (« L'introduction en l'art analytique ») et l'intitulera *la Nouvelle Algèbre de M. Viète*.

+ Les premières abréviations

Viète est de la génération après Girolamo Cardano (dit Cardan, 1501–1576) et un peu plus d'une génération avant Descartes et Pierre de Fermat (vers 1601–1665). Dans ses travaux mathématiques, on trouve des œuvres de géométrie pure, dans la tradition euclidienne, souvent liées à ses préoccupations astronomiques, son travail très novateur en algèbre, ou des œuvres de trigonométrie, s'appuyant à la fois sur sa géométrie et sur son algèbre. Dans tout cela transparaît cependant profondément ce qu'il nomme *« analyse »*. Sa contribution la plus importante est sans doute l'introduction et l'utilisation systématique de lettres de l'alphabet pour représenter à la fois des termes variables et des termes constants ou indéterminés dans une équation.

Lorsque Viète écrit sa nouvelle algèbre, il a conscience d'opérer une rupture et d'ouvrir la voie à un progrès important : *« L'art que je produis est un art entièrement nouveau [...] et afin qu'il n'ait pas l'odeur du vieux, j'ai dû réfléchir et créer des mots nouveaux auxquels les oreilles n'étaient pas jusqu'à présent habituées. Tous les mathématiciens savaient que sous leur algèbre ou Almucabale qu'ils vantaient, et qu'ils nommaient Le Grand Art, étaient cachées des masses d'or incomparables, mais ils ne les trouvaient pas. Aussi vouaient-ils des hécatombes, faisaient-ils des sacrifices à Apollon et aux muses lorsqu'ils parvenaient à la solution d'un seul de ces problèmes que je résous spontanément par dizaines et par vingtaines ; ce qui prouve que notre art est la méthode d'invention la plus certaine en mathématiques. »* (Dédicace de son *Introduction à l'art analytique*, à Catherine de Parthenay, en 1591)

On trouve dans *les Arithmétiques* de Diophante d'Alexandrie (vers III^e siècle), qui a influencé Viète, un petit symbole « ς », ressemblant à un sigma, traduit souvent par *arithme*, sorte d'inconnue auxiliaire, en fonction de laquelle tous les nombres inconnus sont exprimés. Mais n'ayant pas d'autre symbolisme, Diophante ne peut que se baser sur des exemples numériques particuliers, comme le fera al-Khwarizmi. Regiomontanus (1436–1476) est l'un des premiers à s'inspirer vraiment de la lecture de Diophante ; la plupart de ses contemporains préfèrent s'adresser aux textes arabes, dont ils empruntent volontiers le vocabulaire. Ils ont cependant une façon de noter l'inconnue, la « chose », par une abréviation ; on les appelle les *cossistes* : Michael Stifel (vers 1487–1567), Luca Pacioli (1445–1517)... Ils ont aussi inventé un signe pour l'addition et la soustraction, souvent p et m. Cardan et Raphaël Bombelli (1526–1572) auront aussi leur début



© AKG Images/Science Photo Library

de notation. Il s'agit dans tous les cas d'abréviations, qui améliorent grandement l'exposé de la résolution des équations, mais qui ne sont pas répandues de façon universelle. Par ailleurs, il est toujours nécessaire de raisonner sur des exemples numériques.

+ Des chiffres et des lettres

C'est là que se situe la grande invention de Viète. Il propose de désigner non seulement les inconnues par des lettres, mais aussi ce qui est connu. Son calcul porte sur des grandeurs, qu'elles soient connues ou inconnues, ce qui est déjà nouveau (traditionnellement, la nature de l'inconnue était considérée comme distincte de celle des coefficients). On calcule donc sur une représentation des grandeurs, et non plus sur leur valeur. Ce nouveau calcul, il le nommera *logistique spécieuse* (exposée par des signes et des figures, telles les lettres de l'alphabet), qualifiant a contrario le calcul de Diophante (qui portait uniquement sur des nombres rationnels) de *logistique numéreuse*. Il ne fait pas vraiment allusion aux algébristes qui l'ont directement précédé.

Il faut d'abord se donner les moyens de lire une équation écrite de façon littérale. Viète propose de désigner les inconnues par les voyelles, et les coefficients (c'est lui qui invente ce mot) indéterminés par les consonnes. Toutes ces lettres sont écrites en majuscules. Il faut ensuite se donner les moyens de marquer le carré, le cube, voire une puissance plus élevée. Stifel ou Bombelli avaient eu l'idée d'une notation qui ressemble à la nôtre ; Viète optera pour une solution qui peut nous sembler très peu pratique : « A *quadratur* » pour A^2, « A *cubus* » pour A^3, qui deviendront assez rapidement « Aq » et « Ac », puis « Aqq » pour le « carré carré » de A, soit A^4, *etc*. Malgré l'archaïsme apparent, ce n'est pas rien ! Pour ses prédécesseurs, le symbole de l'inconnue n'avait rien à voir avec celui de son carré ou de son cube (par exemple, R, pour *res*, désignait l'inconnue, Q son carré et C son cube, ce qui ne permettait pas facilement de faire des calculs comme une mise en facteur et était très lourd dans le cas de plusieurs inconnues).

Au-delà des notations, comment « calculer » sur des lettres ? C'est l'objet de l'*Isagoge* : les règles de ce nouveau calcul y sont définies, de façon quasi axiomatique. Il s'agit finalement d'étendre les règles du calcul sur les nombres au calcul sur les espèces. Les lettres doivent respecter les

Viète, la double vie

François Viète est né en 1540 à Fontenay-le-Comte ou à Foussais-Payré (Vendée). Il étudie au collège franciscain des Cordeliers (qui fut celui de Rabelais). Ses études de droit le conduisent à une carrière d'avocat. Remarqué pour ses qualités exceptionnelles, il sera conseiller de la famille de Soubise, et précepteur de Catherine de Parthenay, qui jouera un rôle important pour ses travaux mathématiques. Conseiller au parlement de Bretagne, puis maître des requêtes et conseiller du roi Henri III, dans une période très agitée (il est à Paris lors de la Nuit de la Saint-Barthélémy), il sera suspendu de cette charge, de 1584 à 1589. Réfugié prudemment à Beauvoir-sur-mer, ces cinq années lui permettront de se consacrer à son loisir préféré, les mathématiques, ses charges officielles lui en ayant laissé peu le temps. Il y rédigera en particulier son œuvre majeure. Il reprendra en 1589 ses fonctions de conseiller auprès du roi Henri IV. Très fatigué et malade, il meurt à Paris en 1603.

« Il méditait avec tant d'application qu'on l'a vu souvent demeurer trois jours entiers dans son cabinet sans manger, et même sans dormir qu'autant qu'il le pouvait faire en appuyant de temps en temps sa tête sur sa main, pour réparer ses forces par quelques moments de sommeil. […] Il mourut jeune car il se tua à force de travail. » **(Jacques Auguste de Thou (1553 1617), *Éloge de Viète*, dans *Histoire universelle*, tome 14)**

La règle des homogènes

Essayons de résoudre l'équation $x^2 - 2ax = b$, qui s'écrit « Aq – BinAbis aequatur Z plano » chez Viète. Essayons de décrypter. « B » et « Z » désignent nos a et b puisque les coefficients indéterminés sont des consonnes. « A » désigne l'inconnue. « Aq », c'est A^2. « B in A » signifie B×A, et « bis » parce que c'est deux fois « BA ». Le signe – désigne la soustraction, ce qui est moderne et novateur (+ pour l'addition). « Aequatur » signifie = (symbole qui sera utilisé par Robert Recorde en 1557, mais qui mettra beaucoup de temps à s'imposer). Que vient faire cependant ce « plano » ?
Viète introduit la *règle des homogènes*, qui est à la fois une faiblesse de son algèbre par sa lourdeur, mais en même temps une nécessité. Peut-on ajouter un rectangle et un cube ? Peut-on obtenir un cube en ajoutant deux rectangles ? Il va falloir respecter l'homogénéité des dimensions ! « Aq » et « BinAbis » sont de dimension 2. On doit obtenir un « Z » lui aussi de dimension 2, c'est à dire « plano ». C'est Descartes qui rompra la nécessité de l'homogénéité (un allègement considérable, peut-être au prix de quelques sacrifices).

propriétés du calcul sur les nombres et des opérations sur les grandeurs géométriques (qui ont des dimensions). Il invente pour cela des mots, forgés sur le grec, pour décrire ces opérations : hypobibasme pour « diminuer », *parabolisme* pour « rapport »…

Les espèces sont des grandeurs donc, par essence, positives. Ainsi, lorsqu'on résout une équation, on ne peut imaginer que des solutions positives. Les coefficients sont aussi essentiellement positifs. C'est évidemment une autre faiblesse de l'algèbre de Viète, au moment même où certains de ses contemporains se rendaient compte que parfois, en prenant, avec beaucoup de précaution, des quantités négativement, on trouvait des solutions d'équations. Certes ces solutions sont appelées *« feintes »*, *« fausses »*, mais elles sont signalées.



La place François-Viète à Fontenay-le-Comte.

+ De l'analyse malgré tout

L'analyse de Pappus d'Alexandrie (IVe siècle) pour les problèmes de géométrie est un peu ce que nous appelons souvent la « technique du problème résolu ». Supposant le problème résolu, on fait l'*analyse* de la figure, puis à l'aide de théorèmes connus, on remonte au point de départ. Après cette analyse, il faut en général faire une *synthèse*, c'est-à-dire refaire le chemin à l'envers. C'est ce que Viète va appeler l'*art analytique*, qui doit permettre la résolution de n'importe quelle question, pas seulement géométrique. Pour résoudre un problème, on le met en équation, en supposant d'une certaine manière qu'il est résolu. Puis on résout l'équation en appliquant les règles, pour obtenir la solution. C'est une technique très puissante, qui offre des possibilités merveilleuses. En 1591, dans les *Zététiques*, Viète met à l'épreuve son art analytique. C'est sans doute la première fois que l'on voit à l'œuvre un traitement algébrique purement littéral d'un problème de mathématiques. Il propose à la fin de chacun de ses problèmes une application numérique, histoire de montrer peut-être aux sceptiques que sa méthode est bonne, et surtout d'en affirmer la généralité. La logistique spécieuse devient autonome et n'a plus besoin de recourir à des preuves géométriques. En outre, les résultats conservent la trace de toutes les opérations réalisées.

Descartes nous offrira l'écriture et la compréhension actuelle de l'algèbre. La notation moderne est la sienne (les dernières lettres de l'alphabet pour les inconnues, les premières pour les coefficients indéterminés). Il nous a aussi débarrassés de la notion d'homogénéité, du moins en mathématiques. Même s'il a qualifié les solutions négatives de *« fausses »*, il les a prises en compte, il a aussi tenu compte des solutions imaginaires. Descartes a finalement jeté les bases de ce qui deviendra « notre » géométrie analytique. D'autres, dont Fermat, ont au contraire longtemps continué de préférer les notations de Viète plutôt que celles de Descartes. D'autres encore ont cultivé l'analyse de Viète pour la faire progresser : Thomas Harriot, William Oughtred, John Wallis, Alexander Anderson…
On ne peut que citer la fin de l'*Art analytique* : « *Enfin l'*Art analytique *s'approprie à bon droit le magnifique problème de la triple forme enfin revêtue, de la zététique, de la poristique et de l'exégétique. Ce qui est : AUCUN PROBLÈME QUI NE SOIT RÉSOLU.* »

A.B.



© É. Thomas, 2019

Le nom du mathématicien se trouve en bonne place sur la fontaine, en compagnie de François Rabelais !

RÉFÉRENCES

• *François Viète, un mathématicien sous la Renaissance*. Sous la direction d'Évelyne Barbin et Anne Boyé, Vuibert, 2005.
• Dossier « Les notations en mathématiques ». *Tangente* 166, 2015.

Conway, le joueur mathématicien 32
Les mille et une merveilles du jeu de la vie 34
Vertigineux nombres surréels ! 36
Conway et les groupes 39
Un irrésistible géomètre 40
Quand Conway marche dans les pas d'Einstein 42
Notes de lecture : Les livres de Conway 44
En bref : Les inventions de Conway 45 46

Le génie de John Conway

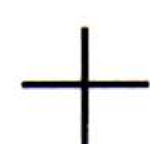
© Mariana Cook | New York City, 2007

John Horton Conway, mathématicien de génie, est décédé à l'âge de 82 ans le 11 avril, à New Brunswick (New Jersey, États-Unis). À la fois créateur à l'imagination débordante dans de nombreux domaines – en particulier le jeu – et vulgarisateur hors pair, il incarnait le modèle idéal de mathématicien dont *Tangente* pouvait rêver.

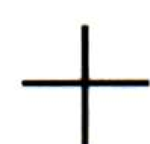
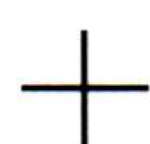
Par son talent, John Conway a fait avancer les mathématiques dans des domaines variés : groupes finis, théorie des nombres, géométrie et topologie géométrique, physique théorique, combinatoire et théorie des jeux.

Mais c'est plus particulièrement le « jeu de la vie » qui l'a rendu célèbre, permettant à un large public de découvrir les mathématiques sous un jour nouveau, ludique et profond à la fois. Ce jeu a servi, entre autres, à la modélisation du développement d'une épidémie. Coïncidence tragique, ce sont des complications liées au coronavirus qui ont eu raison de son créateur.

par Bertrand Hauchecorne




Conway, le joueur mathématicien

John Conway a fait progresser la théorie des groupes finis, la théorie des nombres, la topologie, la physique théorique, la théorie des jeux combinatoires et la géométrie. Son originalité, sa créativité, sa personnalité hors du commun l'ont rendu populaire auprès de tous les amateurs de jeux mathématiques, surtout après sa création dans les années 1970 du jeu de la vie.

Pour Conway, jeux et mathématiques n'étaient que les deux faces d'une même passion. Son génie l'a conduit à de nombreuses découvertes et réalisations, *« beaucoup plus profondes et plus fondamentales »* selon son ami Peter Doyle. Retour sur un brillant itinéraire.

+ L'ascension d'un surdoué

John Conway est né en Grande-Bretagne, à Liverpool, le lendemain du jour de Noël de l'année 1937. Il mène ses études au Gonville and Caïus College à Cambridge et obtient en 1959 son Bachelor of Arts. Passionné de mathématiques dès l'enfance, c'est cette discipline qu'il étudie sous la direction de Harold Davenport, un spécialiste de la théorie algébrique des nombres. Dans ce cadre, il résout le problème de Waring dans le cas des puissances cinquième en montrant que tout nombre entier peut s'écrire comme la somme d'au plus trente-sept puissances cinquièmes. Cependant, le mathématicien chinois Chen Jingrun (1933–1996) démontre le résultat indépendamment (voir *Tangente* 142, 2011) et le publie avant Conway. Son doctorat obtenu en 1964, le Britannique s'installe à Cambridge, où il demeure jusqu'en 1986.

Sa rencontre, au Congrès international des mathématiciens de Moscou en 1966, avec le mathématicien britannico-canadien John McKay (né en 1939), un futur spécialiste de la théorie des groupes finis, sera un tournant dans sa carrière. McKay lui fait connaître les travaux sur les réseaux en dimension 24, développés par le mathématicien britannique John Leech (1926–1992) ; il lui explique que l'étude de certaines symétries semblent intéressantes mais que personne ne parvient à faire avancer le problème. Conway se lance dans l'aventure ; il établit plusieurs résultats importants dans le domaine mais surtout, il découvre en 1968 un nouveau groupe simple d'ordre 4 157 776 806 543 360 000 (voir page 39), obtenu à l'aide du quotient du groupe des symétries d'un tel réseau par un sous-groupe astucieusement choisi. Son intérêt pour la théorie des groupes se poursuivra, en particulier avec la parution en 1985 de l'ATLAS des groupes finis, ouvrage collectif qui recense les propriétés de quatre-vingt-treize d'entre eux.



Le Gonville and Caïus College à Cambridge.

+ Des jeux et des maths

Malgré sa réussite dans la recherche mathématique et la renommée qu'il en acquiert, Conway garde une passion pour les jeux et les récréations. Dès 1967, il invente le Sprouts (d'un mot anglais signifiant « germes » ou « choux de Bruxelles »), un jeu proche du morpion, avec son collègue informaticien Michael Stewart Paterson. En 1970, il met au point le jeu de la vie, en s'inspirant d'une idée de John von Neumann (voir en page 30). Ce mathématicien américain d'origine hongroise avait cherché à réaliser une machine théorique se reproduisant elle-même. Ceci donne l'idée à Conway de construire des modèles de cellules qui naissent ou meurent suivant des règles précises. Plus qu'un jeu, c'est un modèle d'évolution, qui sera une avancée importante dans l'étude (et la popularisation !) des automates cellulaires.
Ce jeu apparaît dans les colonnes de la rubrique de jeux mathématiques de la revue Scientific American tenue par Martin Gardner (1914–2010). Devant l'immense succès obtenu auprès des lecteurs, Conway et Gardner se rencontrent ; ce sera le début d'une coopération féconde, doublée d'une profonde amitié. Ceci motive John Conway à poursuivre dans cette voie et à inventer de nombreux autres amusements mathématiques, qui connaîtront un grand succès, notamment au travers des rubriques de Gardner (voir *Tangente* 136, 2010).
Ses étudiants racontent que Conway avait toujours dans sa poche une corde, un dé ou un quelconque objet qui servait de base à une démonstration et les aidait à comprendre une notion difficile. Pour lui, les mathématiques et les jeux étaient mêlés et concouraient à enseigner de manière ludique, comme on peut s'en rendre compte en lisant son ouvrage *On Numbers and Games* publié en 1976 (voir page 44).
C'est ainsi que l'analyse du jeu de go amène Conway à inventer, en 1974, les nombres surréels (voir en page 36), ensemble de nombres contenant à la fois les réels et les infinitésimaux. Ces nombres seront vulgarisés par son excentrique et génial compère américain Donald Ervin Knuth (né en 1938), surtout connu pour l'élaboration du traitement de texte scientifique TeX.

En 1986, Conway quitte Cambridge pour accepter la chaire de mathématiques « John von Neumann » à l'Université de Princeton, dans le New Jersey (États-Unis), qu'il conservera jusqu'à sa retraite. Là, ses travaux se concentrent davantage sur la géométrie ; il s'intéresse également à la mécanique quantique et énonce, avec le mathématicien canadien Simon Kochen, le théorème du libre arbitre (voir en pag 42). En 2013, il quitte sa chaire à l'université mais ne se retire pas de son univers, les mathématiques et les jeux, continuant à animer des activités, en particulier auprès des jeunes.
Hélas, le 11 avril dernier, la veille du jour de Pâques, la pandémie de Covid-19 l'a emporté au jeu de la vie.

B.H.

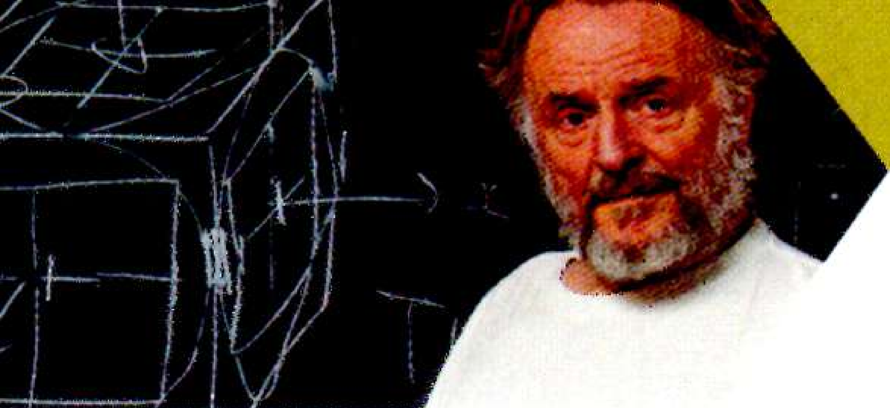
Une pluie d'hommages

Conway était l'un des mathématiciens les plus attachants. Il savait alterner les mathématiques du plus haut niveau avec une popularisation magistrale adaptée pour tous les publics. Sa passion était d'initier des groupes d'adolescents à ces amusements mathématiques qui conduisaient souvent à des réflexions fécondes. De son bureau, dans un désordre absolu, jaillissait les idées les plus géniales et les plus originales. *« Il était comme un papillon allant d'une chose à une autre, toujours avec des qualités magiques qui le conduisaient au résultat »* aimait dire son collègue Simon Kochen. Cette démarche aurait pu paraître désordonnée ; bien au contraire, c'est le jeu qui lui a inspiré ses plus grandes découvertes scientifiques, car pour lui les mathématiques étaient elles-mêmes un jeu qu'il souhaitait faire partager au plus grand nombre.
Les hommages de ses pairs sont remplis d'une immense admiration. Pour Cédric Villani, *« John Conway était un mathématicien brillant, l'un des plus inventifs que j'aie jamais croisés, qui restera dans la mémoire scientifique pour ses groupes finis, nombres surréels, fascinants jeux et casse-tête… Respect infini »*. De son vivant, Sir Michael Francis Atiyah (1929–2019) affirmait : *« Conway est le mathématicien le plus magique du monde entier. »* Pour Terence Tao, *« Conway était probablement un point extrémal dans l'enveloppe convexe de tous les mathématiciens »*. C'est sans doute le plus bel hommage, que seuls les plus matheux comprendront !



John Conway selon son ami Simon Fraser.

© Simon J. Fraser, 1979



par Michel Criton

Les mille et une merveilles du jeu de la vie

Une des créations les plus connues de John Conway est le jeu de la vie, dont il eut l'idée en 1970. Il s'agit d'un cas particulier d'automate cellulaire, constitué d'êtres virtuels qui se développent dans les cellules d'un quadrillage régulier, vivent, meurent et naissent selon des règles définies à l'avance.

Le jeu de la vie est entièrement déterministe. La pertinence du mot « jeu » est d'ailleurs discutable, puisque aucune intervention d'un quelconque joueur n'est nécessaire, une fois la configuration de départ définie. On peut dire qu'il s'agit d'un jeu à zéro joueur. En revanche, chercher des configurations initiales intéressantes constitue bien un jeu à un joueur !

+ Bien plus qu'un jeu

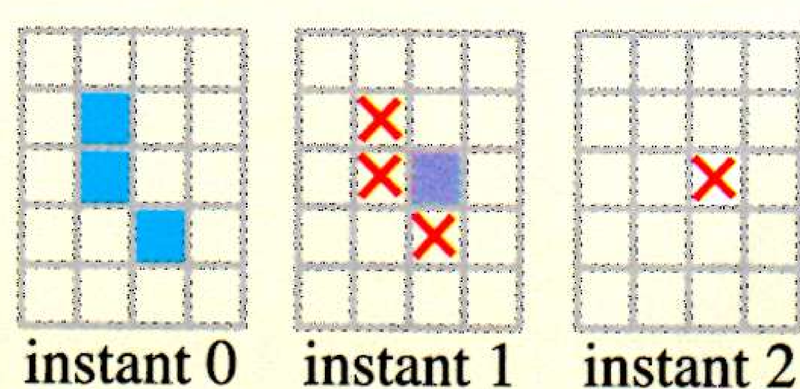
Dans un automate cellulaire, une population de départ constituée d'êtres monocellulaires va vivre, donner naissance à de nouvelles cellules, et parfois mourir, selon des règles intangibles. Le jeu de la vie fonctionne sur un quadrillage régulier formé de carrés unitaires pavant le plan. Des cases de ce quadrillage vont vivre, naître. Le temps dans lequel vivent ces cellules est un temps discret qui s'écoule en « instants » successifs. On passe de l'instant 0 à l'instant 1, puis à l'instant 2, *etc.*, sans transition. Chaque cellule du quadrillage est soit vivante (pleine), soit morte (vide). Son évolution dépend de chacune de ses huit voisines (deux cellules voisines ayant un côté ou un sommet en commun).

Les règles du jeu de la vie de Conway sont élémentaires, et pourtant elles permettent de générer des objets étonnants. Si, à l'instant n, une cellule est vivante, elle le reste à l'instant $n + 1$ si, et seulement si, deux ou trois de ses cellules voisines sont vivantes. Dans tous les autres cas, la cellule meurt à l'instant suivant. Si à l'instant n, une cellule est vide, elle naît à l'instant $n + 1$ et s'anime si, et seulement si, exactement trois des cellules voisines sont vivantes. Dans les autres cas, la cellule demeure vide.
Les morts et les naissances se produisent simultanément ; juste avant de mourir, une cellule peut participer à la naissance d'une autre.

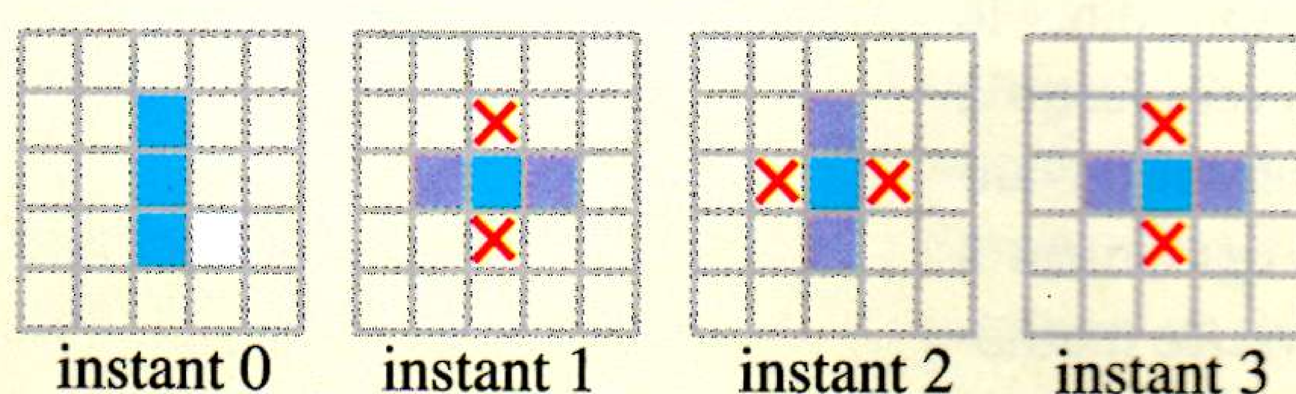
Une population d'une seule cellule, ou de deux cellules, ne peut survivre ; elle s'éteint immédiatement. Voyons quelques exemples d'évolution de populations.

Sur cet exemple et ceux qui suivent, les cellules vivantes sont représentées en bleu, les cellules qui viennent de mourir en rouge, et les cellules qui viennent de naître en mauve. Ci-dessous à gauche, on part d'une population de trois cellules. Deux de ces cellules ont un seul voisin et la troisième en a deux. Toutes les trois vont donc mourir. Mais une cellule vide possède trois voisins (avant leur mort). Cette cellule va donc voir une naissance. Mais une cellule seule ne peut survivre ; à l'instant 3, notre population sera donc éteinte.

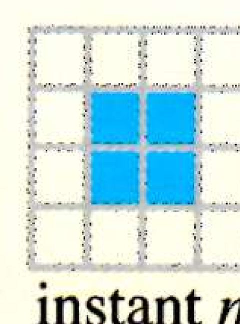
Ci-dessous (au milieu), trois cellules forment un rectangle, qui, en évoluant, va être alternativement horizontal, puis vertical. On a affaire à une transformation de période 2 : la population va



Vers une extinction rapide.



Le clignotant.



Une population immuable.

prendre deux états. On l'appelle parfois un *pulsar* ou un *clignotant*.

Avec ces quatre cellules formant un carré 2 × 2, voici une population complètement stable : aucune cellule ne meurt, ni ne naît.

Ci-contre, la configuration initiale à quatre cellules se développe, puis, contre toute attente, donne naissance à partir de l'instant 9 à quatre pulsars qui vont clignoter indéfiniment.

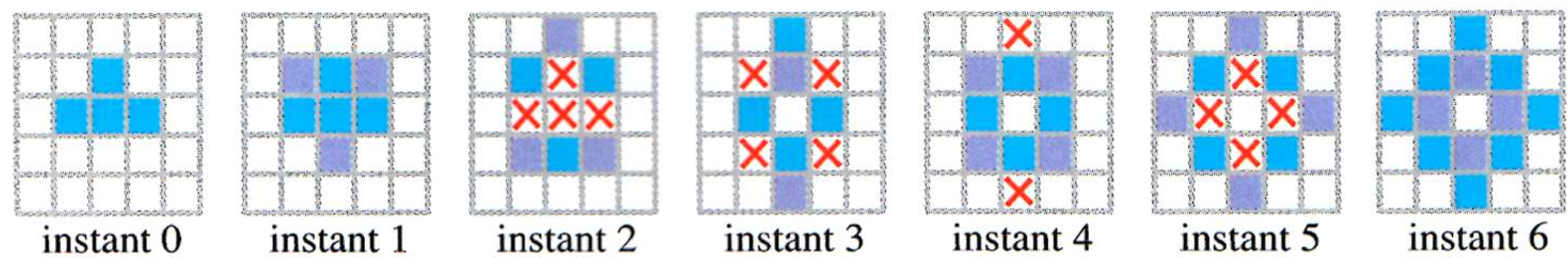
Un autre type de population est appelé *glisseur* : cette configuration revient périodiquement à sa forme initiale, mais en se déplaçant, ou en glissant selon un vecteur bien défini.

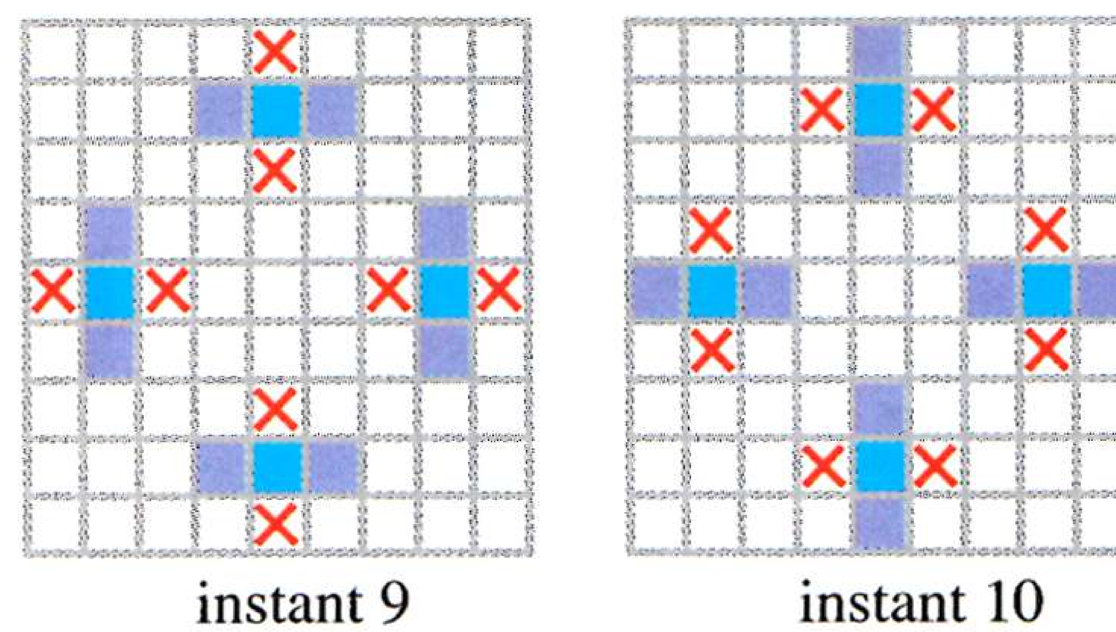
L'étude du jeu de la vie peut conduire à de multiples questions parfois difficiles. Trouver des *jardins d'Eden* (des populations sans antécédent, c'est-à-dire des populations qui ne peuvent découler d'aucune population antérieure) est un problème fascinant et redoutable.
Trouver des populations de période 2 (comme le clignotant), de période 3, 4, 5… vous occupera un moment. Explorer d'autres règles de « survie », de « mort » et de « naissance » des cellules permet d'expérimenter une profusion de variantes de comportements (sociaux ?) dans l'évolution des populations cellulaires. Enfin, les plus audacieux s'amuseront à explorer d'autres types de pavage du plan (triangulaires, hexagonaux), ou de l'espace à trois dimensions.

+ Des mathématiciens au paradis

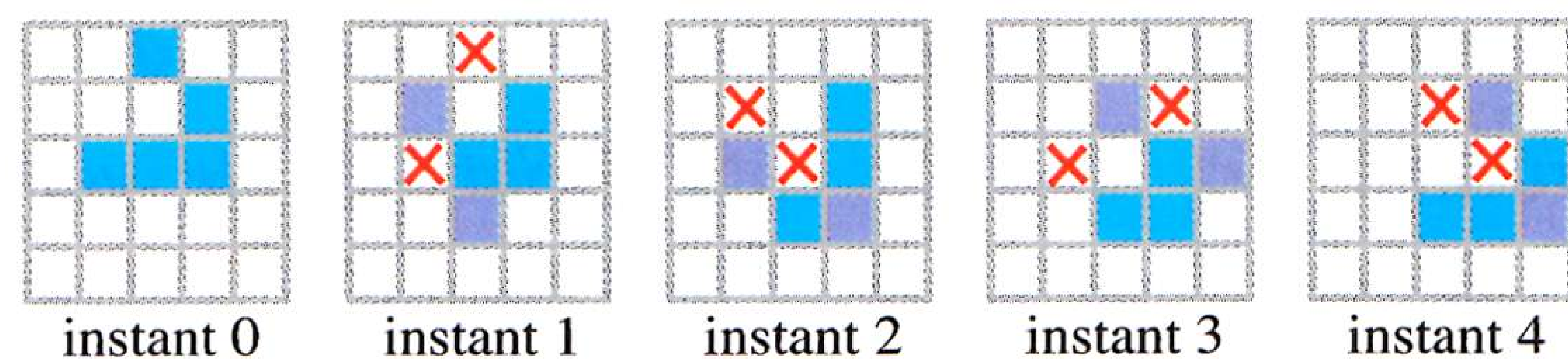
Un jardin d'Eden constitué de deux cent vingt-six cellules a été trouvé en 1971 par Roger Banks, Mike Beeler et Rich Schroeppel. Des configurations plus petites ont été découvertes depuis, notamment à l'aide de puissants ordinateurs, mais trouver les dimensions du plus petit jardin d'Eden reste un problème ouvert.

Les automates cellulaires sont nés dans les années 1940, avec les travaux de Stanislaw Ulam (1909–1984) et John von Neumann (1903–1957), dans la continuité des idées énoncées par Alan Turing (1912–1954), qui posaient alors les bases de ce qui allait devenir l'informatique théorique.
Von Neumann utilisait un autre type de voisinage, en ne considérant que les seules voisins Nord, Sud, Est et Ouest. Edward Moore (1925–2003) utilisait le même type de voisinage que dans le jeu de la vie, en étendant éventuellement la distance de voisinage au-delà d'une unité. Edward Fredkin (né en 1934) fait intervenir dans son automate la parité du nombre de voisins vivants.

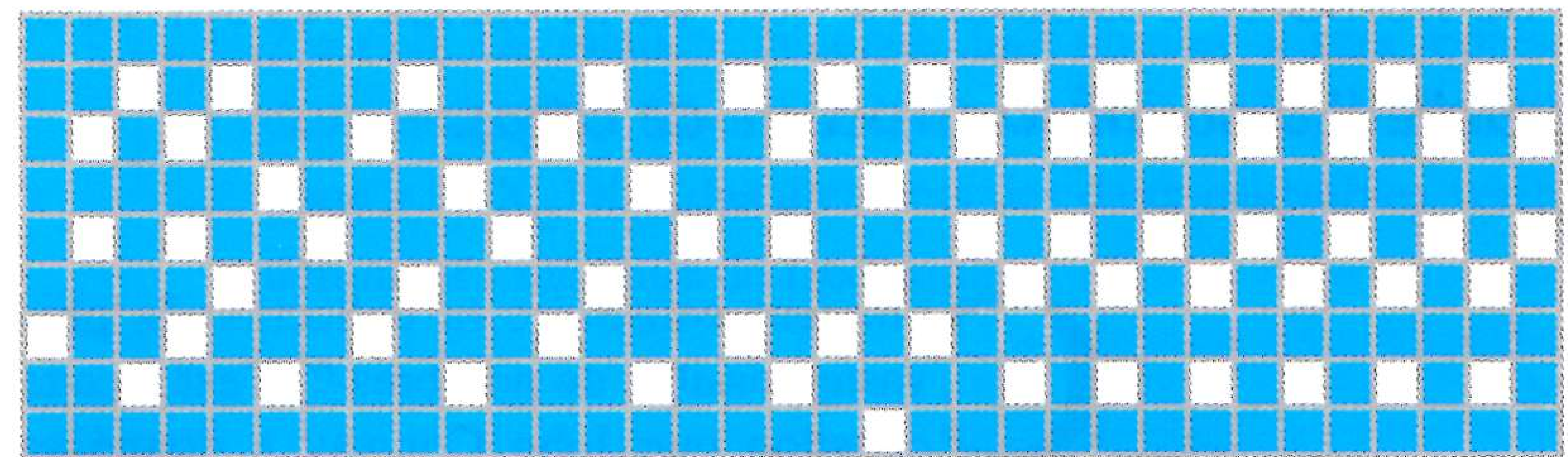




Les quatre clignotants.



Le glisseur.



Le jardin d'Eden de Roger Banks, Mike Beeler et Rich Schroeppel.

Ces automates connaîtront un développement extraordinaire avec l'arrivée des ordinateurs. Mais en 1970, lorsque John Conway imagina le jeu de la vie, il ne disposait d'aucune machine informatique. Il étudiait alors les configurations de son jeu avec des pions, qu'il posait sur un goban (plateau d'un jeu de go).

Des variantes du jeu de la vie peuvent aussi modéliser la propagation d'une maladie au sein d'une population (voir *Tangente* 131, 2009). Les cases blanches représentent une population saine uniformément répartie dans le plan, et les cases bleues les individus infectés, la maladie se transmettant dans des conditions bien précises de densité de population.

M.C.

RÉFÉRENCES

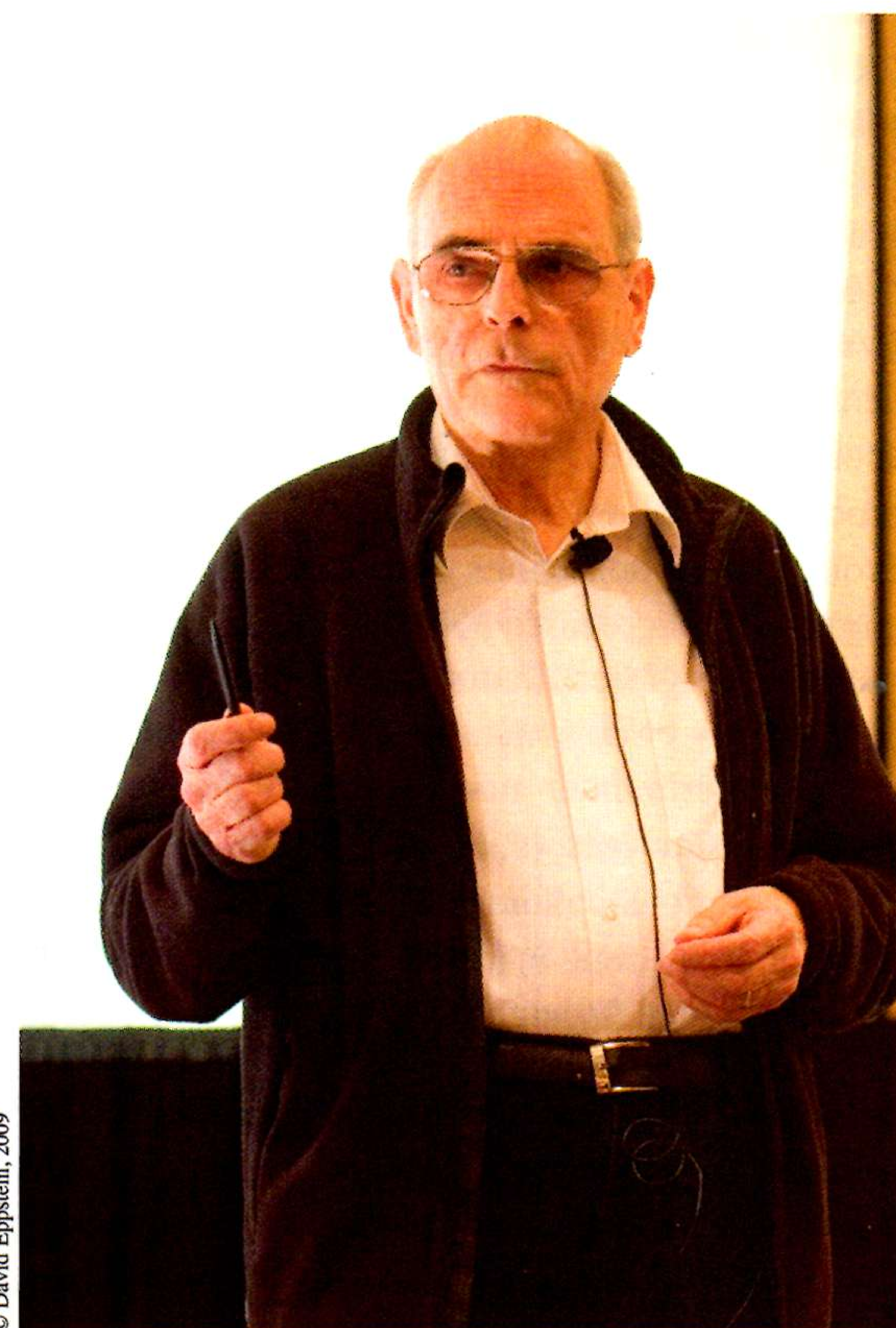
- *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*. Martin Gardner, Freeman, 1983.
- *Le royaume du jeu de la vie*. Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science* 180, avril 2009.
- Un simulateur du jeu de la vie pour jouer en ligne : **https://www.dcode.fr/jeu-de-la-vie**
- *Mathématiques et informatique*. Bibliothèque Tangente 52, 2014.
- *Les algorithmes*. Bibliothèque Tangente 37 2013.

par D. Justens et J. Bair

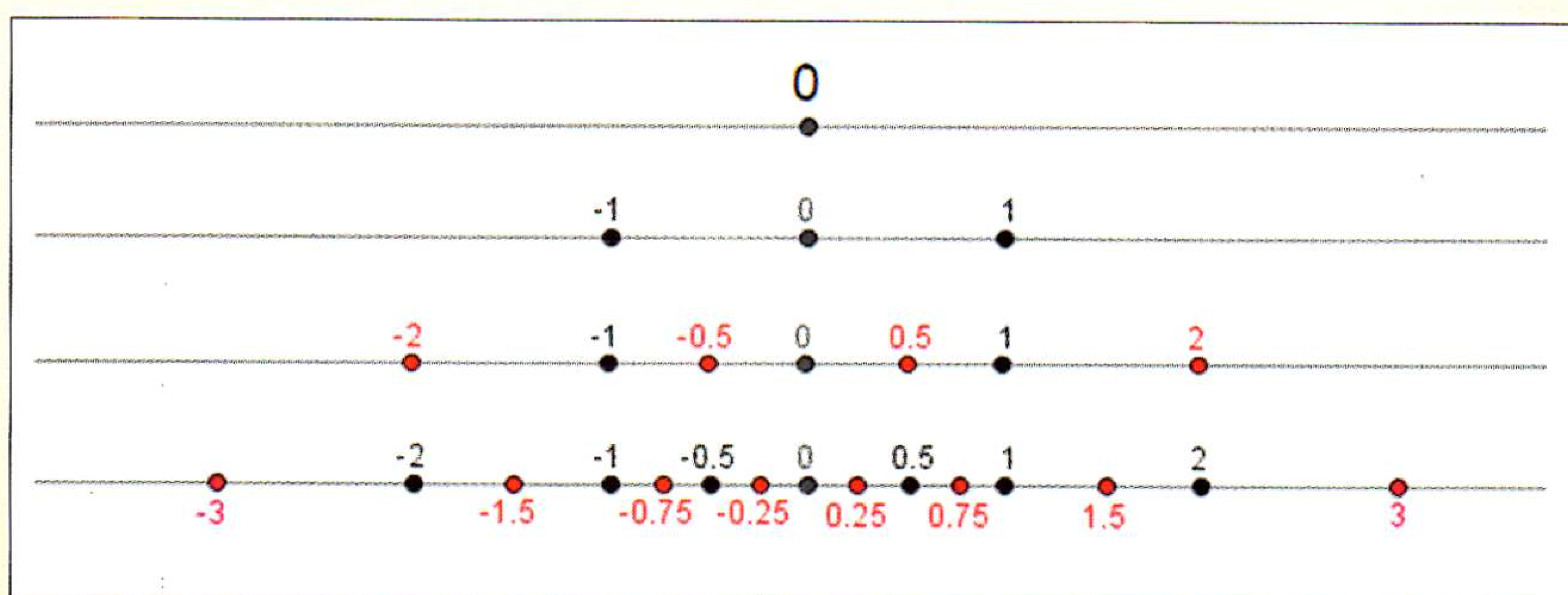
Vertigineux nombres surréels !

En couplant la notion de coupure de Dedekind et la construction des nombres entiers naturels de von Neumann, John Conway a construit la plus grande collection de nombres possible. Il s'agit de la classe des surréels, à laquelle il a donné la structure de corps.

Comment construire la collection la plus vaste possible de nombres ? C'est à cette question que John Conway a donné sa réponse en partant d'une idée du mathématicien américain Donald Knuth (né en 1938) et en s'inspirant de la notion de *coupure* introduite par l'Allemand Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916). Ce dernier proposa de construire rigoureusement l'ensemble des nombres réels en partant de l'ensemble plus facile à gérer des nombres rationnels. Ce passage n'est pas aussi évident qu'il ne peut sembler à première vue puisqu'il implique le passage de l'infini dénombrable à l'infini continu. Une coupure au sens de Dedekind est constituée de deux ensembles de nombres, chaque élément du premier ensemble étant strictement inférieur à tout élément du second ensemble. L'exemple classique de coupure de Dedekind est la construction du nombre $\sqrt{2}$. Le premier ensemble (A) est celui des nombres rationnels négatifs auxquels on ajoute l'ensemble de tous les rationnels tels que leur carré est strictement inférieur à 2. Le second ensemble (B) est constitué de l'ensemble de tous les rationnels positifs dont le carré est supérieur ou égal à deux. Dedekind a l'idée de définir un nombre réel comme la juxtaposition de deux ensembles de nombres rationnels. Le nombre $\sqrt{2}$ est donc défini comme le couple d'ensembles (A, B). C'est une idée similaire qui va conduire John Conway à définir la collection des nombres surréels.


© David Eppstein, 2009

Donald Ervin Knuth (né en 1938).



+ S'inspirer des coupures

Chaque unité de temps, Conway propose de construire une succession de nombres. À l'instant initial, il n'y a rien. Rien, si ce n'est l'ensemble vide. Mais l'ensemble qui ne contient rien n'est pas rien, puisqu'il contient la structure d'en-

semble. John von Neumann définissait le « 0 » comme une identification à cet ensemble vide : $0 = \{\} = \emptyset$. Conway va concilier le point de vue de Dedekind et celui de von Neumann pour construire la plus grande collection de nombres jamais imaginée.
Pour lui, le nombre initial, le nombre « 0 », sera constitué par la paire $(\emptyset, \emptyset)$. C'est la première étape du processus de construction. Les nombres suivants vont être définis progressivement, unité de temps après unité de temps, en complétant à gauche et à droite la collection de nombres existants et en « bouchant les trous ». Partant de 0, on ajoute -1 et $+1$ à gauche et à droite. Il n'y a pas de trous à boucher. Dès la deuxième unité de temps, on possède trois nombres et donc deux « trous ». L'unité de temps suivante, on ajoute -2 et $+2$ à gauche et à droite et on bouche les deux trous en ajoutant $-1/2$ et $+1/2$. Ces différentes étapes sont visualisées par le graphique ci-contre, dans lequel les « nouveaux nombres » sont notés en rouge. À chaque étape, le « nombre de nombres » est plus que doublé, puisque, en notant $n(t)$ le cardinal de l'ensemble des nombres construits à l'étape t, on a $n(t + 1) = 2n(t) + 1$. À l'étape t, ce cardinal vaut $2^t - 1$.

Le début du formalisme

Comment Conway parvient-il à formaliser la construction des surréels ? À l'étape 1, il n'existe qu'un seul nombre, le « 0 », identifié à $(\emptyset, \emptyset)$. La définition de ce nombre correspond-elle bien à la notion de coupure de Dedekind ? Pour le vérifier, il faut montrer que tout nombre appartenant à l'ensemble de gauche est strictement inférieur à tout nombre appartenant à l'ensemble de droite. Les deux ensembles étant vides, la propriété (comme toute une gamme de propriétés de ce type, d'ailleurs) est forcément vérifiée ! Passons à l'étape 2. Le nombre -1 est identifié par le couple $(\emptyset, \{0\})$, le nombre $+1$ l'est par $(\{0\}, \emptyset)$. Les conditions de Dedekind sont évidemment vérifiées, étant donnée la nature très particulière de l'ensemble vide. L'étape 3 n'est pas plus difficile. On a $-2 = (\emptyset, \{-1, 0, 1\})$, $-1/2 = (\{-1\}, \{0, 1\})$, $1/2 = (\{-1, 0\}, \{1\})$ et enfin $2 = (\{-1, 0, 1\}, \emptyset)$. Les notations s'alourdissent rapidement. Pour simplifier, notons $-2 = (|-1)$, $-1/2 = (-1\,|\,0)$, $1/2 = (0\,|\,1)$ et $2 = (1\,|)$. De manière générale, tout nombre x sera représenté par deux ensembles, un ensemble à gauche, un ensemble à droite. On a donc $x = (X_G | X_D)$, les éléments des deux ensembles vérifiant évidemment l'inégalité de Dedekind.

Jusqu'ici la construction est bien connue. Elle livre l'ensemble des rationnels *dyadiques*, c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $k/2^n$, avec k et n entiers relatifs. Tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de nombres rationnels dyadiques ; ce résultat se retrouve intuitivement, puisque tout nombre réel peut être approché par défaut et par excès à $1/2^n$ près, n appartenant à l'ensemble des entiers naturels. On voit apparaître ici l'idée des deux ensembles chère à Dedekind (approche par excès et par défaut).
L'opération se poursuit ainsi pour un nombre aussi grand que l'on veut d'étapes, pourvu que ce nombre soit fini.
L'idée géniale de Conway consiste à considérer qu'il ne faut pas s'arrêter après un nombre fini d'étapes. Le mathématicien introduit donc l'étape ω, correspondant à une infinité dénombrable d'unités de temps ! Jusque-là, on restait dans l'ensemble des rationnels. Que se passe-t-il en continuant ? L'étape ω consiste à compléter tous les trous des dyadiques et à ajouter un nombre à chaque extrémité ! On arrive ainsi à retrouver les réels (entre deux dyadiques, on peut toujours trouver un réel), sans compter les nombres $-\omega$ et ω. Mais il y a plus ! Cette étape introduit également un nombre compris entre 0 et l'ensemble de tous les rationnels positifs du type $1/2^n$, quel que soit n, un nombre qui sera noté $1/\omega$. On voit arriver là, simultanément, deux infiniment grands et un infiniment petit ! Les hyper-réels sont nés.
Mais pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? L'étape $\omega + 1$ voit apparaître une nouvelle infinité de nombres s'intercalant dans tous les trous. On



© Bibliothèque de l'École polytechnique fédérale de Zürich

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916).

L'arithmétique des nombres surréels

Reprenons le formalisme de Conway. Que se passe-t-il lors de l'étape ω ? En considérant cette fois $X_G = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$ et $X_D = Ø$, on obtient le nombre $ω = (ℕ|)$ qui se place… tout juste « après » la suite de tous les entiers. En considérant cette fois $X_G = \{0\}$ et $X_D = \{... 1/8, 1/4, 1/2, 1\}$, on définit l'infiniment petit $1/ω$. Conway définit alors toutes les opérations arithmétiques sur sa fabuleuse collection de nombres, une définition qui se réduit évidement à la définition usuelle quand on se contente de travailler avec les réels. Ces définitions lui permettent d'étendre la collection des infiniment grands, en introduisant les nombres $ω – 1$, $ω – 2$, et ainsi de suite. Étendant l'opération de division aux infiniment grands, il montre par exemple que $ω/2 = (ℕ| ... ω – 3, ω – 2, ω – 1, ω)$, vérifiant que (selon sa définition de la multiplication) $2 × ω/2 = ω$.

Les Nombres Surréels,
ou comment deux anciens étudiants découvrirent les mathématiques pures et vécurent heureux
Une romance mathématique de D. E. Knuth

Traduction : Daniel E. Loeb et Hélène Loeb[1]
Auteur : Donald E. Knuth[2]

Original ©1974 - Addison Wesley Publishing Company
Traduction ©March 2, 1997- Loeb

[1] Université de Bordeaux I, URA CNRS 1304
[2] Stanford University

voit apparaître ici des halos chers aux amateurs d'analyse non standard (voir *Mathématiques, de l'esthétique à l'éthique*, Bibliothèque Tangente 51, 2014). Mais apparaissent aussi de nouveaux infiniment grands, notés $ω + 1$ et $–ω –1$. Vertigineux, n'est-ce pas ?

Les surréels, c'est la classe !

Le « jeu » est des plus amusants. Car on sent l'aspect ludique de la construction ! Mais le mathématicien britannique ne s'est pas contenté de construire sa collection, il l'a dotée également de la structure de corps (ensemble de nombres formant un groupe pour l'addition et la multiplication et possédant certaines propriétés agréables comme la distributivité). Seules ombres au tableau, la collection des surréels est « trop grosse » pour se contenter de la structure d'ensemble, et le corps des surréels n'est pas archimédien (au sens que la *propriété d'Archimède* suivante, vraie sur l'ensemble des réels, n'est pas vérifiée pour les surréels : « pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple de la plus petite qui est supérieur à la plus grande »).

Une définition claire permettant de définir de manière sûre tous les objets appartenant à une collection C ne suffit pas pour que C soit un ensemble. Le paradoxe de Russell fournit un bon exemple de classe qui n'est pas un ensemble, à savoir la classe des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. En théorie des ensembles, la considération de tels objets conduit à des contradictions. La collection des surréels possède la structure de *classe* à défaut de celle d'ensemble.

Par ailleurs, l'introduction des infiniment petits dans la classe des surréels fait tomber la propriété d'Archimède. En effet, en faisant des pas de longueur $1/ω$, on ne dépassera jamais 1 en partant de $1/2$!


© Alan W.Richards

John von Neumann (1903-1957).

Alice et Bill

Certes, la construction élaborée par le génial mathématicien semble élaborée. Et elle l'est. Mais elle a aussi tout d'un jeu. L'auteur en a d'ailleurs montré les aspects ludiques dans la deuxième partie de son ouvrage *On Numbers and Games* (Academic Press, 1976), lorsqu'il évalue la valeur de la force des positions de certains jeux qu'il qualifie de *« plus proches des échecs que du football »* et dans lesquels s'affrontent deux joueurs, souvent appelés Gauche et Droite (ou Noirs et Blancs, Vertical et Horizontal).
Pour confirmer l'aspect ludique de la théorie, le mathématicien Donald Knuth, qui fut d'ailleurs l'un des inspirateurs de Conway, en offre aussi une présentation ludique et théâtrale sous la forme d'un dialogue vivant entre deux anciens étudiants. *Les Nombres surréels, ou comment deux anciens étudiants découvrirent les mathématiques pures et vécurent heureux : une romance mathématique* propose un texte simultanément accrocheur, joyeux et rigoureux, dont la lecture ralentit à mesure que les démonstrations s'y succèdent. Car les deux étudiants, une jeune femme, Alice, et un jeune homme, Bill, sont doués. Leurs conclusions tombent vite. Et il n'est pas toujours aisé de les suivre dans leurs divagations. Bonne lecture quand même !

J.B. & D.J.

par Bertrand Hauchecorne

Groupes et sous-groupes normaux

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi de composition interne, associative, possédant un élément neutre et tel que tout élément possède un symétrique. Parmi les groupes, ceux possédant un nombre fini d'éléments ont passionné des mathématiciens dès les années 1860, tels Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832–1918), Émile Mathieu (1835–1890) ou Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922). Rapidement, des familles de tels groupes sont mises en évidence, comme le groupe des congruences modulo n ou le groupe diédral des isométries laissant stable un polygone régulier à n côtés.

Un *sous-groupe* H d'un groupe G est une partie vérifiant les axiomes de groupe lorsque l'on restreint la loi de composition à ses éléments. Considérons un élément x de G, on note xH l'ensemble des éléments de la forme xh, avec h dans H (et de même Hx est l'ensemble des éléments hx, avec h dans H) ; la loi est ici notée multiplicativement.

Évariste Galois, déjà, avait mis en évidence des sous-groupes jouant un rôle particulier et que l'on qualifie de *normaux* (ou *distingués*) ; ce sont ceux qui, pour tout élément x de G, vérifient xH = Hx. Leur intérêt est de permettre de ramener la structure d'un groupe à l'étude de groupes « plus petits » grâce à ce que l'on nomme des *groupes quotients*.

Aussi, pour étudier la structure des groupes finis, il suffit de connaître celle des groupes ne possédant aucun sous-groupe distingué *propre* (c'est-à-dire différent du groupe lui-même et non réduit à l'élément neutre) : on les appelle des *groupes simples*.

Les groupes sporadiques

De nos jours, on a répertorié différentes familles, souvent infinies, de groupes finis simples (voir ci-contre) provenant principalement de l'algèbre linéaire ou de la géométrie, même s'ils ne sont pas toujours « simples » au sens courant du terme. On peut citer le groupe symétrique A_n des permutations paires de n objets pour n différent de 4.

En 1861, Émile Mathieu découvre un groupe sortant de ces différentes familles et ayant 95 040 éléments ; dans les années qui suivent, il en découvre quatre autres, dont le plus grand possède 244 823 040 éléments. Étant inclassables, William Burnside (1852–1927) les a nommés groupes *sporadiques*. On a prouvé depuis qu'il en existe vingt-six, dont le plus gros, le Monstre, possède environ 8×10^{53} éléments ! Sa construction a été réalisée en 1982 par le mathématicien américain Robert Louis Griess (né en 1945) comme les automorphismes d'une algèbre de dimension 196 833. Depuis, John Conway en a simplifié la construction.

en bref

Les groupes de Conway

Un réseau de dimension n est l'ensemble des points à coordonnées entières dans une certaine base d'un espace vectoriel réel de dimension n. John Leech (1926–1992) se passionnait pour un réseau en dimension 24 suite à des recherches d'empilements de sphères (ou plutôt d'hypersphères). Très jeune, John Conway a flairé des études intéressantes à faire sur de tels réseaux et en a étudié des symétries.

Cela lui a permis de découvrir en 1968 un groupe sporadique que l'on nomme Co_1 ; il possède le nombre faramineux de $2^{21} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 23$ éléments (soit 4 157 776 806 543 360 000). Pour les passionnés, c'est le quotient du groupe des automorphismes du réseau de Leech par son centre. Puis, cerise sur le gâteau, Conway s'est aperçu que deux de ses sous-groupes étaient eux-mêmes des groupes sporadiques. Nommés respectivement Co_2 et Co_3, leus nombres d'éléments valent respectivement $2^{18} \times 3^6 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 23$ et « seulement » $2^{10} \times 3^7 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 23$.

En fait, la structure de ces trois groupes se déduit de celle du Monstre. Quelques années plus tard, les vingt-six groupes sporadiques étaient construits.

Un irrésistible géomètre

Trouver des liens féconds entre deux objets mathématiques qui a priori n'ont pas vocation à se rencontrer. Voici l'essence de la démarche de Conway. Comment procédait-il pour mettre à jour ces liens ? Il s'amusait, comme le montrent ces quelques exemples issus de la géométrie !

En créant, à propos de très nombreuses énigmes, des mathématiques accessibles aux amateurs éclairés, John Conway a éclairé d'un jour nouveau et de manière complètement inattendue une grande variété de sujets. Son génie inventif s'est aussi manifesté en géométrie, où il a non seulement imaginé des résultats insoupçonnés, mais créé des jeux et des dispositifs innovants. Il a également revisité à sa manière la démonstration de certains résultats.

Le cercle de Conway du triangle ABC.

+ Le cercle de Conway

On part, en toute simplicité, d'un triangle ABC, et on reporte sur les prolongements de ses côtés des longueurs égales à celles des côtés du triangle, ce qui détermine six nouveaux points. Conway a eu l'idée que ces six points sont cocycliques… et il a eu raison ! Le cercle ainsi constitué a évidemment pris le nom de *cercle de Conway* du triangle ABC.

La preuve de cette cocyclicité tient en peu de mots. Soit S l'intersection des bissectrices du triangle. AI = AE donc (SA) est également médiatrice de [IE] et, par suite, SI = SE. De la même façon, SH = SD et SF = SG. (SA) est également médiatrice de [GD] puisque AG = AD, et (SB) est médiatrice de [EH] puisque BE = BH. D'où SG = SD et SE = SH, ce qui achève de démontrer que les six points D, H, E, I, F et G sont tous situés sur un même cercle.

La démonstration nous donne en prime la position du centre S du cercle de Conway, qui est également le centre du cercle inscrit au triangle ABC, dont on peut déterminer le rayon *r* (voir en encadré).

Plein d'humour, Conway voyait toujours le côté ludique des choses. Il a imaginé une démonstration… en forme de puzzle d'un « sévère » résultat de géométrie, le *théorème de Morley*.

© Dbenbenn

Le théorème de Morley : le triangle violet est équilatéral.

C'est en 1899 que le mathématicien britannique Franck Morley a démontré ce résultat : les trisectrices des angles intérieurs d'un triangle se coupent en trois points formant un triangle équilatéral. De ce théorème *« très facile à énoncer, difficile à prouver »*, comme il le disait, John Conway a proposé en 1997 une démonstration plutôt étonnante, en forme de puzzle (voir notre article dans le prochain numéro).

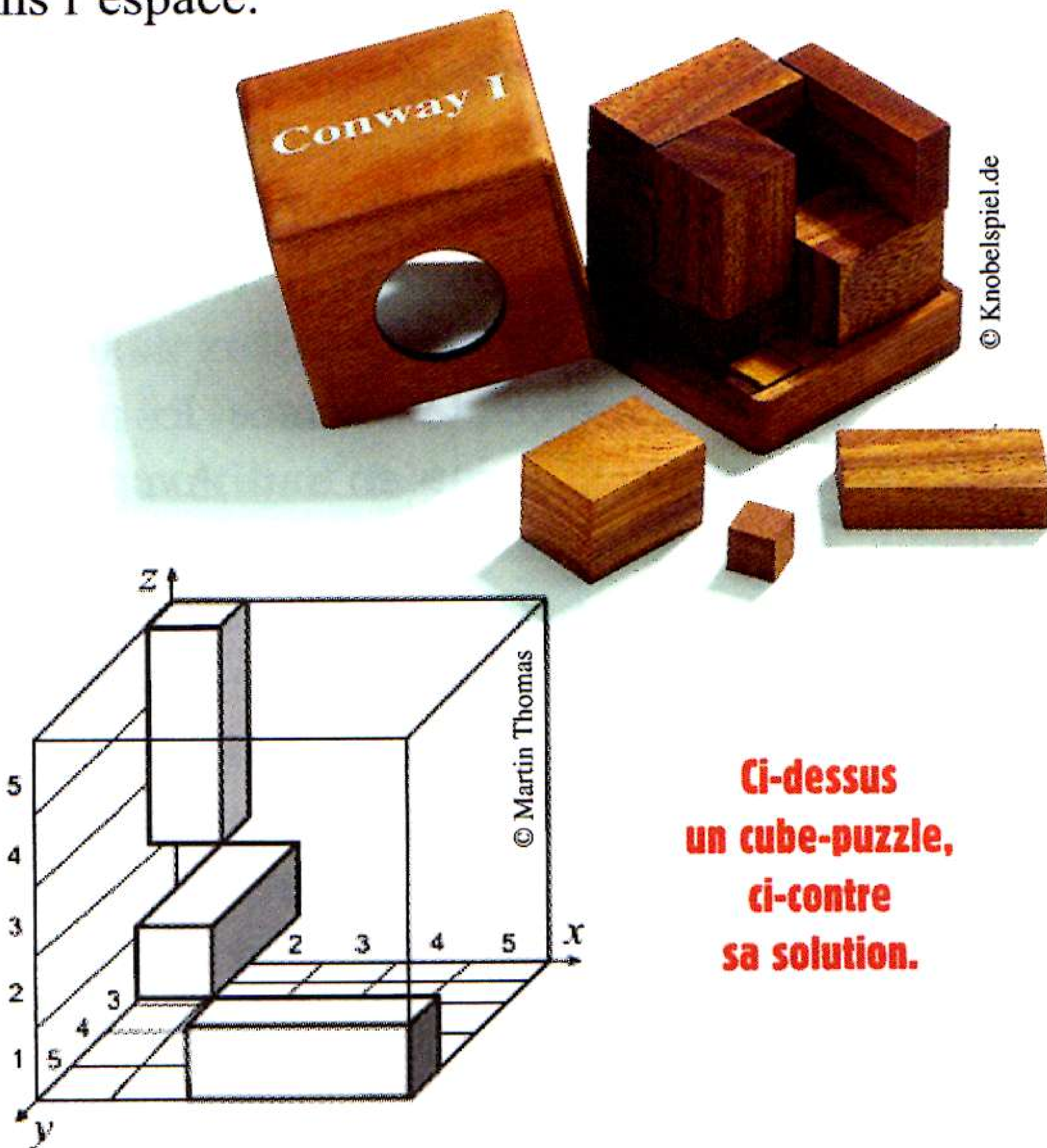
+ Des puzzles pour démontrer

Conway a imaginé bien d'autres puzzles plans et s'est aussi illustré par des casse-tête dans l'espace, visant bien souvent à reconstituer un cube. L'un d'eux, difficile, consiste à reconstruire un cube $5 \times 5 \times 5$ avec treize pavés $1 \times 2 \times 4$, un pavé $2 \times 2 \times 2$, un pavé $1 \times 2 \times 2$ et trois pavés $1 \times 1 \times 3$. Ce sont eux que

On en connaît un rayon !

On peut aisément déterminer *r*. Si J est le projeté orthogonal de S sur (BC), le calcul se fait dans le triangle SFJ. Comme SF = SH, (SJ) est médiatrice de [FH], segment dont J est donc milieu. Ainsi, $SF^2 = SJ^2 + JF^2$. Or, par construction, FJ est le demi-périmètre p du triangle ABC et, si s est l'aire du triangle ABC, on sait que $s = pr$, donc $SJ = s/p$ et alors $SF^2 = (s/p)^2 + p^2$. Voilà décrypté le cercle de Conway !

l'on placera en premier, dit Conway en invoquant des considérations de parité. On s'arrangera pour qu'ils occupent les quinze tranches 5×5×5 du cube, dans toutes les directions (voir le schéma). Il reste ensuite à placer les blocs les plus grands : 1×2×4, 2×2×2 et 2×2×2 pour reconstituer le cube tout entier. De nombreux problèmes de géométrie ludique sont conçus à partir de dominos 1×2. Certains font intervenir des *triominos* (assemblages de trois carrés unitaires), mais peu des *pentaminos* (assemblage de cinq carrés). Conway, qui fait toujours des pentagones très bon usage, les rebaptise *quintominos* et les utilise pour résoudre un petit jeu géométrique dans l'espace.



Ci-dessus un cube-puzzle, ci-contre sa solution.

De combien de façons différentes peut-on colorier avec cinq couleurs les cinq triangles issus du centre d'un pentagone régulier ? Conway répond douze, sans tenir compte des coloriages tournant dans le sens inverse. Il utilise son résultat pour passer à l'espace et colorier les faces d'un dodécaèdre régulier, pentagonales elles aussi, comme les douze quintominos, de manière qu'une seule couleur apparaisse de part et d'autre d'une même arête.

On voit les pentagones apparaître chez Conway, et, de façon plus subreptice mais très féconde, dans le livre qu'il a publié avec le mathématicien canadien Richard Kenneth Guy, décédé – à 103 ans – à peine plus d'un mois avant Conway. Ils répertorient au chapitre 4 du *Livre des nombres* (Eyrolles, 1998) les familles de nombres fameuses, parmi lesquelles les *nombres de Catalan* (voir *Tangente* 158, 2014), qui trouvent de nombreuses applications (voir *les Nombres*, Bibliothèque Tangente 33, 2019 et *Mathématiques discrètes et Combinatoire*, Bibliothèque Tangente 39, 2010).

Les nombres de Catalan, dont le $n^{\text{ème}}$ est donné par

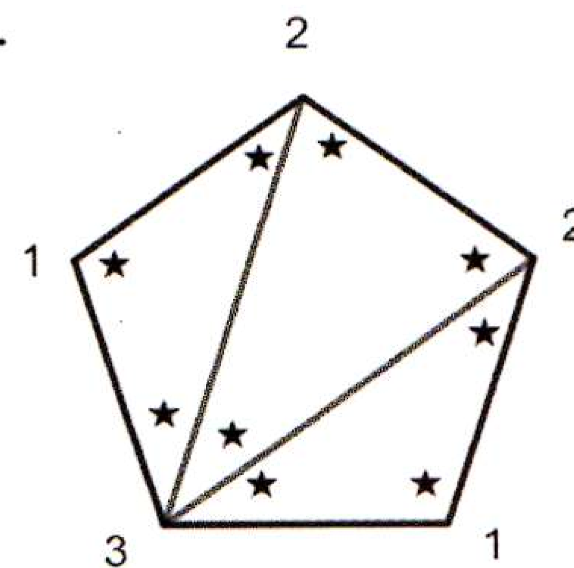
$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\,\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n(n-1)\dots\times 2\times 1}$$

fournissent en particulier le nombre de façons de découper en triangles un polygone de $n+2$ côtés. Les auteurs illustrent les nombres de Catalan en prenant en exemple le pentagone ($n = 3$), mais en reliant le problème de dénombrement – de manière inattendue – à celui des frises de nombres. Non seulement ils vont le résoudre, mais ils réussissent à nous le faire comprendre en profondeur par ce détour.

On part de nombres arrangés en une frise, construite selon la règle que, dans toute alvéole en losange (en rouge), la somme des termes « droite–gauche » dépasse de 1 celle des termes « haut–bas » :

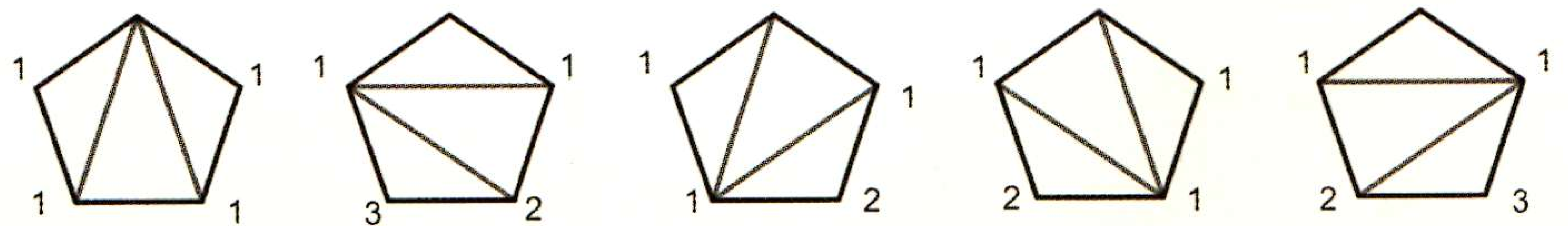
1 1 1 1 **1** 1
1 2 2 **1** **3** 1
1 3 1 **2** 2 1
1 1 1 1 1 1

La deuxième ligne de la frise donne le nombre de triangles à chaque sommet du découpage, en tournant autour du pentagone. C'est le même ici pour tous les découpages.



Nombre de triangles à chaque sommet.

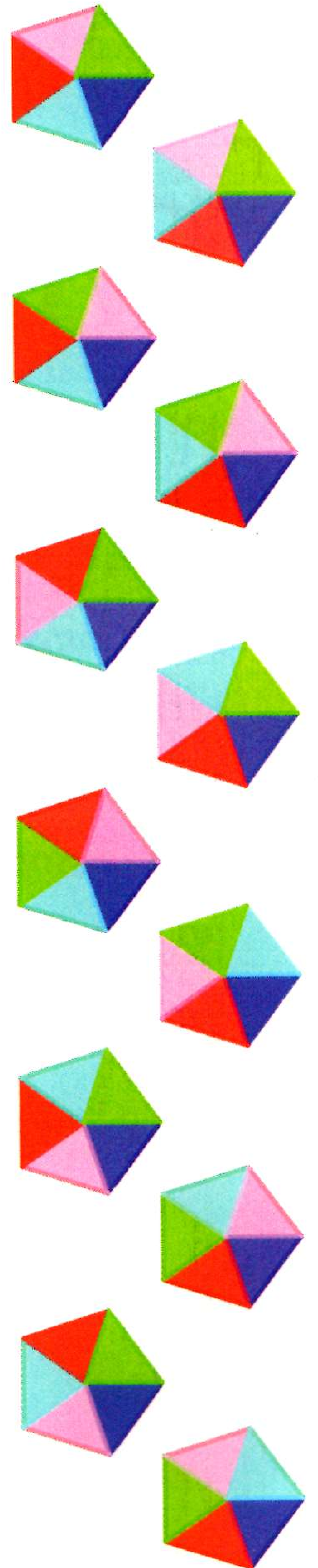
On compte ensuite le nombre de diagonales différentes sur cette « frise » : il y en a cinq ici, et elles correspondent, nous disent Conway et Guy, aux différentes partitions du pentagone en triangles. Toute l'astuce consiste à ne pas nommer le sommet supérieur du pentagone, puis à nommer « 1 » ceux qui lui sont reliés, et pour le dernier sommet de chaque triangle, faire la somme des deux autres… et, en tournant autour du pentagone, on retrouve bien les cinq diagonales de la frise précédente, exactement le nombre de Catalan c_3. Magique !



Les cinq façons de découper un pentagone en triangles.

Voilà bien là tout le génie de John Conway, qui savait si bien relier entre eux, et de façon parfois inattendue, les différents domaines des mathématiques, pour les rendre plus parlantes et plus aimables.

É.B.



Les douze quintominos.

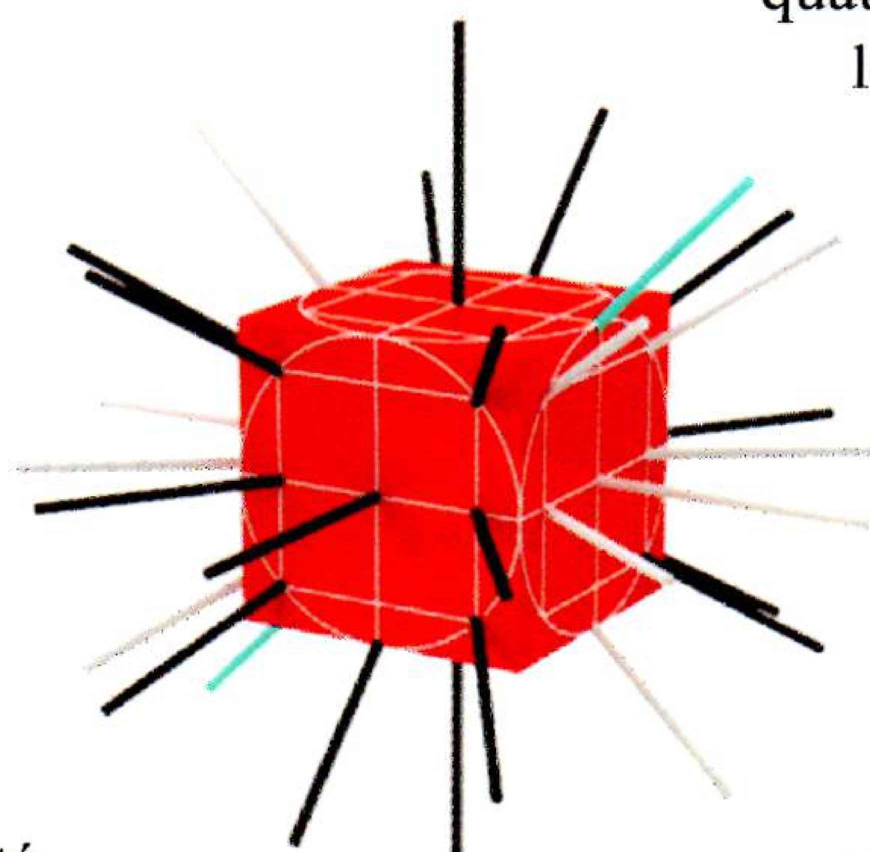
RÉFÉRENCES

- *Le cercle.* Bibliothèque Tangente 36, 2009.
- *Découpages et pavages.* Bibliothèque Tangente 64, 2018.
- *Jeux mathématiques.* Bibliothèque Tangente 20, 2004.

Quand Conway marche dans les pas d'Einstein

John Conway s'est associé à Simon Kochen pour démontrer le* théorème du libre arbitre *(« the free will theorem »). Ce résultat force à reconsidérer la mécanique quantique, sans l'associer nécessairement à des probabilités. Il apporte un éclairage nouveau à un paradoxe mis en avant par Einstein.

Un individu ou une entité dispose du *libre arbitre* à l'instant *t* si son état ne peut pas être décrit comme résultat de l'application d'une fonction, au sens mathématique, portant sur l'état de l'Univers avant cet instant *t*. Il s'agit d'une sorte d'« indéterminisme fonctionnel ». Le théorème part de deux axiomes liés à la mécanique quantique, nommés Spin et Twin, et de Min, un axiome lié à la relativité.



Des droites qui sortent d'un dé

Pour introduire Spin, commençons par dessiner, sur chaque face d'un cube, un carré de même centre que la face, aux côtés parallèles à ceux de la face. On en retient les sommets, le centre, et les milieux de ses côtés, donc neuf points en tout. Avec les six faces du cube, on arrive à cinquante-quatre points. Si l'on ajoute les milieux de chacune des douze arêtes du cube lui-même, on totalise soixante-six points. Mais on se limite à trente-trois car tout point de l'ensemble possède un symétrique par rapport au centre du cube, les deux se trouvant sur le même axe.

Le spin d'une particule élémentaire et la mécanique quantique

Le *spin* est le moment cinétique intrinsèque des particules élémentaires. C'est une de leurs propriétés internes, au même titre que la masse ou la charge électrique. Les bosons ont un spin entier ou nul tandis que les fermions ont un spin demi-entier. Le boson de Higgs a un spin nul. L'électron, le positron, les neutrinos, les quarks ont un spin égal à 1/2. Le photon, le gluon (associé à l'interaction forte), les bosons W^+, W^- et Z^0 (associés à l'interaction faible) ont un spin qui vaut 1. Le graviton, particule hypothétique (qui serait associée à la gravitation), a un spin égal à 2. Enfin, la théorie de la supersymétrie prédit une particule élémentaire de spin 3/2, le gravitino.

En mécanique classique, le moment angulaire d'une particule possède une *magnitude* (sa vitesse de rotation) et une *direction* (son axe de rotation). En mécanique quantique, le moment angulaire contient les mêmes informations, mais la composante du spin mesurée selon une direction quelconque, c'est-à-dire sa projection sur un axe quelconque, peut prendre plusieurs valeurs, qui correspondent chacune à un état quantique différent. Autrement dit, si on ne s'intéresse qu'à un spin individuel, alors il n'est pas possible de déterminer avec précision sa direction dans l'espace ! Du coup, certains physiciens ont tenté d'apporter une solution permettant d'établir une continuité de la mécanique classique vers la mécanique quantique. Ils ont inventé la notion de *variable cachée contextuelle* (liée à la mesure), désignant des paramètres physiques hypothétiques qui ne seraient pas pris en compte par les postulats de la mécanique quantique, soit dans la définition de l'état quantique, soit dans son évolution dynamique.
Une conséquence du théorème du libre arbitre est que ces théories physiques seraient fausses !

Maintenant, si l'on considère les trente-trois axes distincts, il n'existe aucune façon de leur attribuer des valeurs 0 ou 1 de sorte que chaque triplet d'axes orthogonaux porte les valeurs (0, 1, 1) dans n'importe quel ordre. Ce résultat est *a priori* surprenant car le nombre des combinaisons possibles, 2^{33} exactement, dépasse 8,5 milliards.

Selon la mécanique quantique, quand on mesure le carré du spin d'une particule de spin égal à 1 selon trois axes orthogonaux, on retombe toujours sur les valeurs 0, 1 et 1, dans n'importe quel ordre. Cette propriété, testable, est admise comme axiome par Conway : c'est l'axiome Spin. Du coup, le spin n'a pas de valeur déterminée avant qu'on le mesure. Il se décide au moment de la mesure, pas avant.

En 1935, Albert Einstein (1879–1955), Boris Podolsky (1896–1966) et Nathan Rosen (1909–1995) ont souligné une curiosité de la mécanique quantique, le *paradoxe EPR*, qui est une conséquence du principe d'incertitude. Prenons l'exemple de deux photons émis par un atome à la vitesse de la lumière. Avant leur passage dans un polariseur, ils sont caractérisés par un état horizontal ou vertical (avec une chance sur deux).
Toute mesure faite sur les deux particules donne des résultats identiques. Donc, même si les résultats de certaines observations séparées à distance ne peuvent pas être prédits individuellement à l'avance, ils peuvent être corrélés. Deux particules jumelles, même éloignées l'une de l'autre, fournissent des résultats identiques si on les soumet à des opérations de mesure identiques. L'existence et les propriétés de telles particules sont aujourd'hui connues.
L'axiome Twin admis par Conway considère une paire de particules jumelles a et b de spin égal à 1. Un expérimentateur A mesure le carré du spin de a selon trois axes orthogonaux x, y et z tandis qu'un expérimentateur B mesure le carré du spin de b selon un certain axe w. Twin énonce que si w est x, y ou z, alors le résultat trouvé par B est le même que le résultat trouvé par A pour w.

Le dernier axiome admis par Conway, Min, précise la notion de localité. Il considère à nouveau les expérimentations précédentes, mais spatialement séparées et simultanées dans un certain repère inertiel. Le choix par B de l'un des trente-trois axes (appelé w précédemment) est libre et le résultat trouvé par A est indépendant de ce choix. Min avance que le choix par A d'un repère orthogonal (x, y, z) est libre et le résultat trouvé par B est indépendant de ce choix.

La relativité restreinte

Selon la théorie de la relativité restreinte, l'espace et le temps doivent être perçus comme formant une seule entité, la vitesse de la lumière dans le vide est invariable (peu importe la vitesse de l'observateur et de la source lumineuse), et les mesures de diverses quantités sont relatives à la vitesse de l'observateur (le temps se dilate et l'espace se contracte).

Les calculs montrent alors que la vitesse de la lumière est aussi la vitesse maximale de déplacement, qu'elle n'est atteinte que pour la lumière ou toute notion dépourvue de masse, et qu'elle doit être considérée comme la vitesse maximale de déplacement de l'information. Il s'agit d'une sorte de principe de causalité.

Apparaît ensuite la notion de localité. Tous les repères en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre sont équivalents du point de vue des lois de la physique. Si deux évènements I et II se déroulent simultanément dans un certain repère inertiel, on peut trouver un autre repère inertiel dans lequel II se déroule avant I, et un autre encore dans lequel I se déroule avant II. Selon le principe de causalité, il est impossible à un évènement d'influer sur un évènement passé. Donc l'éloignement dans l'espace entraîne, du fait des changements de repères possibles, l'impossibilité d'une influence de II sur I et réciproquement.

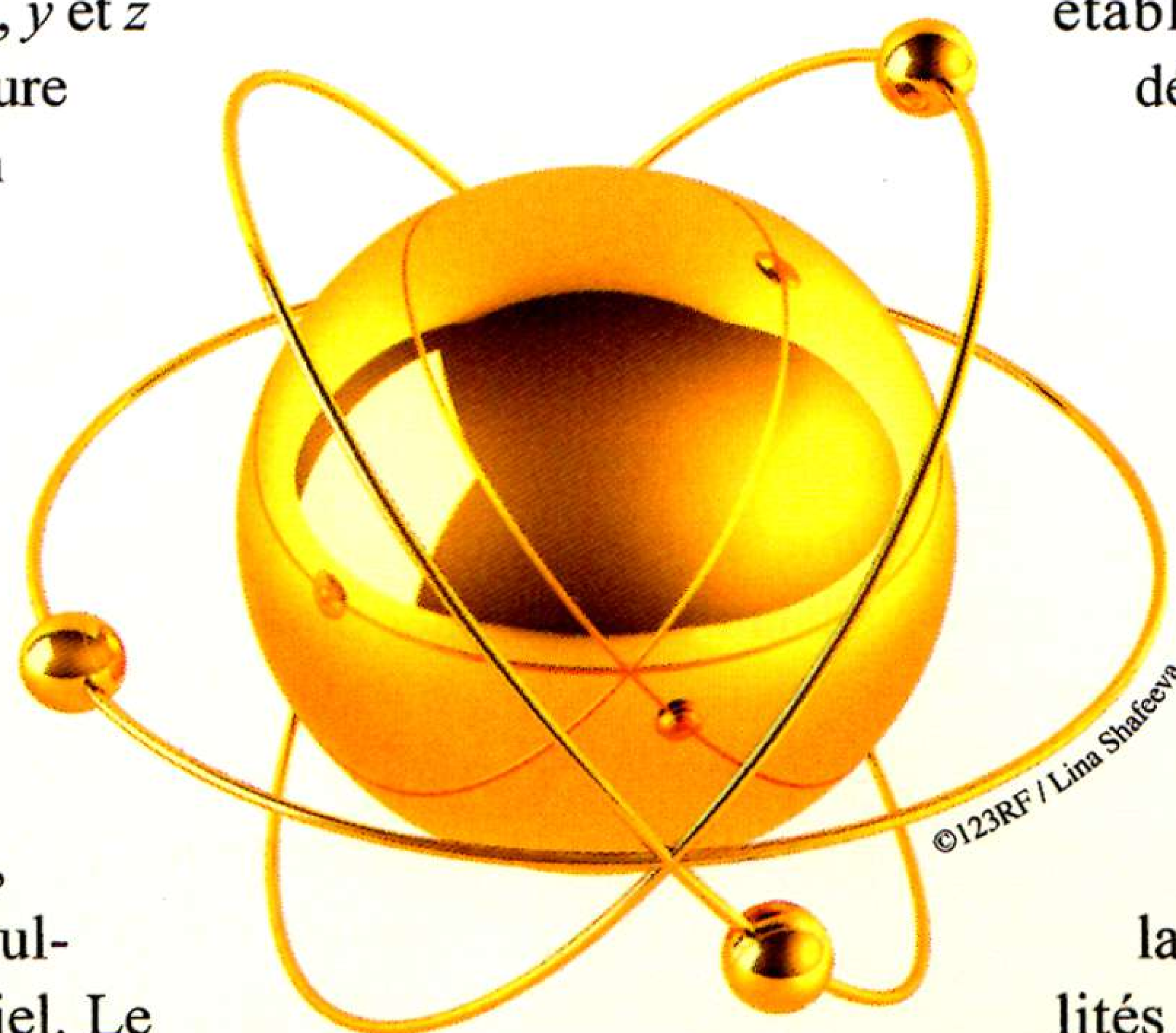
Références :
- *Mathématiques et physique.* Bibliothèque Tangente 69, 2019.
- *Les équations de la physique moderne.* Bibliothèque Tangente 71, à paraître en 2020.

Le théorème, enfin...

Une fois les trois axiomes adoptés, Conway démontre que la réponse d'une particule de spin égal à 1 lors d'une expérience de mesure du carré du spin selon trois axes orthogonaux est libre. Elle n'est pas une fonction de l'état de l'univers avant l'instant de la réponse.

Aujourd'hui, personne ne sait établir un lien entre les décisions libres des particules et celles des humains. Mais une chose est sûre : si l'on admet l'axiome MIN (le seul qui n'est pas testable), alors Conway et Kochen ont démontré que l'aléatoire de la théorie des probabilités ne rend pas compte du libre arbitre des particules. L'indéterminisme de la mécanique quantique est beaucoup plus subtil que ce que l'on croyait jusqu'à présent ! Einstein peut dormir en paix : *« Dieu ne joue pas aux dés. »*

J.-L. L.

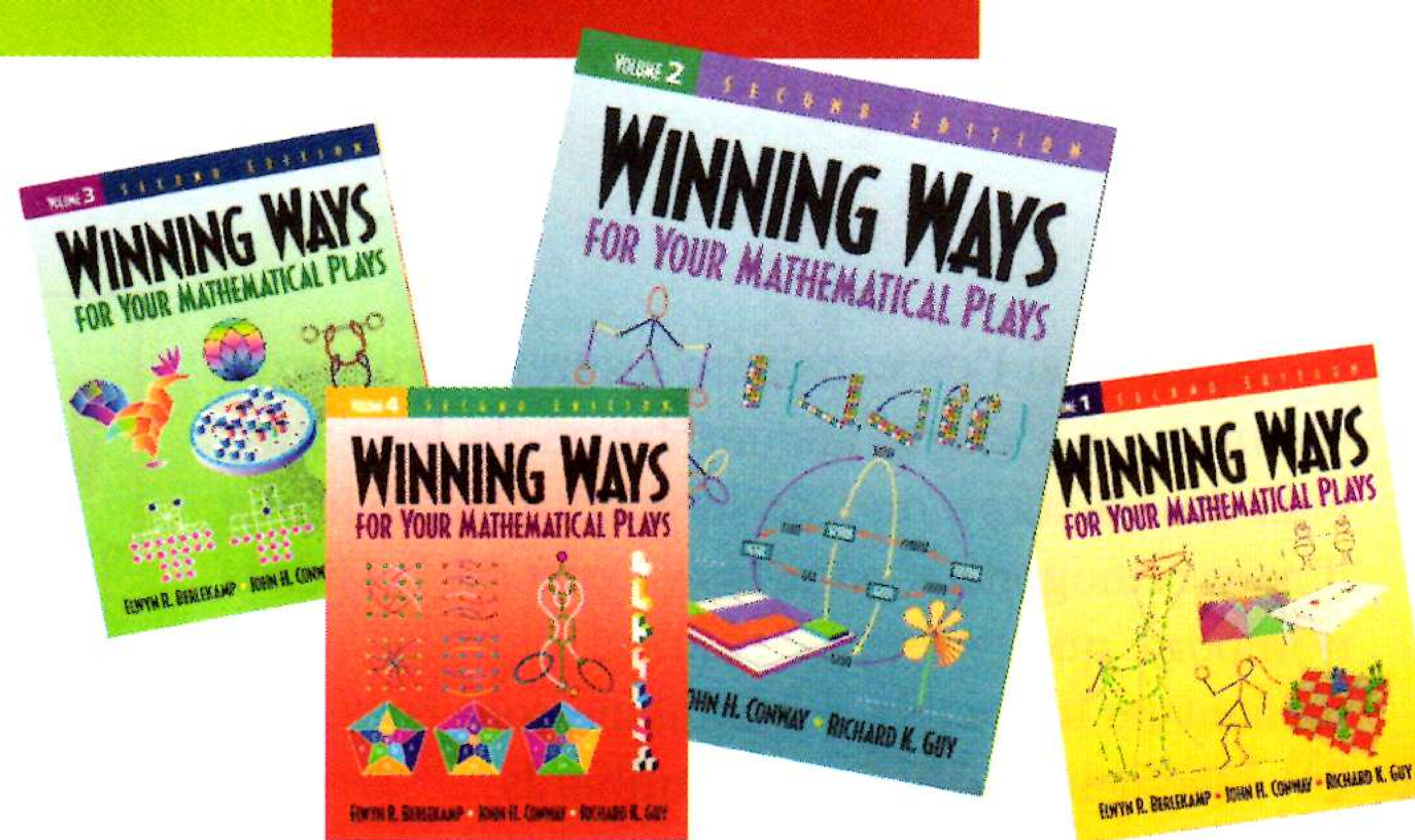


©123RF / Lina Shafeeva

par Bertrand Hauchecorne

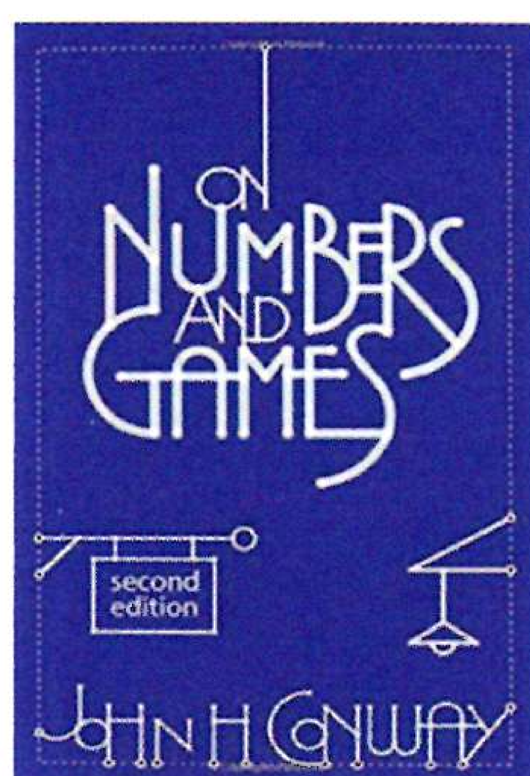
Des livres de référence

Guidé par ses passions et ses découvertes, John Conway a rédigé de nombreux ouvrages passionnants mais malheureusement peu traduits.

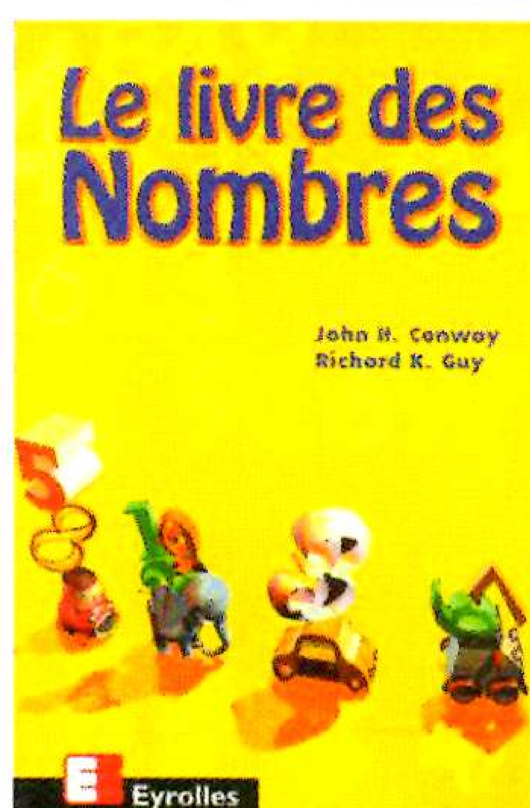


Voyages parmi les nombres

Faisant suite à l'immense succès du jeu de la vie, Conway a publié en 1976 *On Numbers and Games* (Academic Press), republié en 2001 (AK Peters). L'écriture en est simple, humoristique et certains chapitres sont accessibles à des non-matheux. Bien que signé du seul Conway, on sait qu'il résulte de profonds échanges avec Martin Gardner (voir *Tangente* 136, 2010). La première partie de cet ouvrage fondateur de la théorie des jeux combinatoires, intitulée de manière amusante *Zeroth part* (« Partie zéro »), est consacrée... aux nombres, en particulier les surréels. *First part* se penche plus particulièrement sur des jeux avec deux joueurs nommés Right et Left et contribue à une réflexion sur les nombres qui y sont omniprésents.



John Conway et son ami Richard Kenneth Guy (1916 – 2020), lui aussi récemment décédé, font paraître en 1995 *The Book of Numbers*. Les deux compères nous offrent un fantastique voyage parmi les nombres, des entiers aux transcendants en passant par les imaginaires. C'est le seul ouvrage de Conway traduit dans notre langue (*le Livre des nombres*, Eyrolles, 1998) ; il est malheureusement définitivement épuisé.



en bref

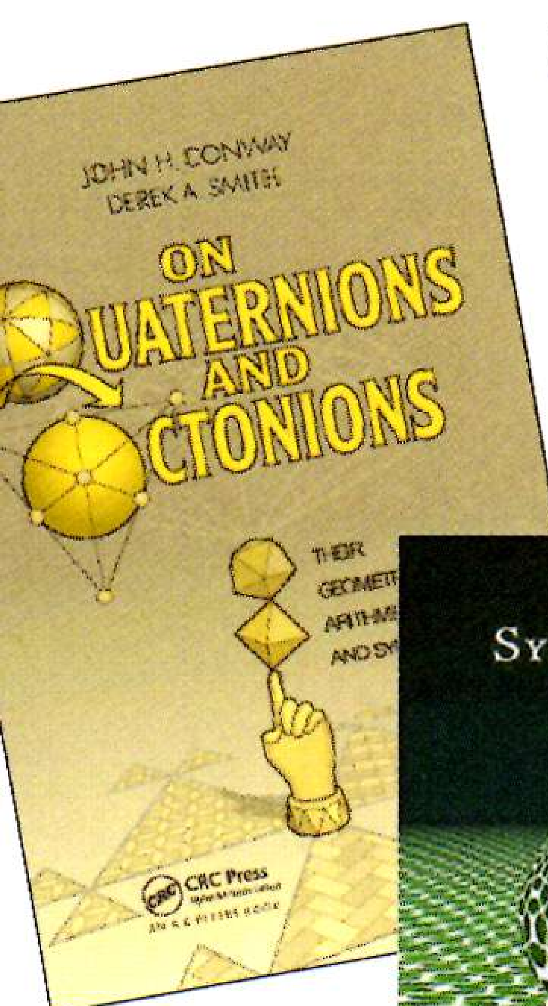
Les trois mousquetaires
de la théorie des jeux combinatoires

Martin Gardner est bien connu pour ses multiples talents et son militantisme contre les pseudosciences. Mais sa grande renommée lui vient de la chronique de récréations mathématiques qu'il tenait dans *Scientific American*. Sa passion pour les amusements mathématiques l'a rapproché de John Conway, mais aussi de deux autres très grands mathématiciens, Elwyn Ralph Berlekamp (1940 – 2019) et Richard Guy. Le premier fut l'un des fondateurs de la théorie des jeux combinatoires et l'auteur d'algorithmes de correction d'erreurs. Quant au second, il était spécialiste de la théorie des jeux et de celle des graphes.

Les trois hommes partageaient une amitié complice avec Gardner et, bien sûr, une passion pour les jeux mathématiques et la féerie des nombres. Ils unirent leur talent et leurs savoirs respectifs pour rédiger ensemble en 1982 *Winning Ways for your mathematical Plays*. La première édition de cet ouvrage (Academic Press) se compose de deux volumes qui traitent du jeu, tant de manière théorique que pratique. Le premier pose les fondements de la théorie des jeux combinatoires, le second décrit divers jeux aux règles non académiques. La deuxième édition (AK Peters, 2001 à 2004) comprend deux volumes supplémentaires : le troisième expose de nouveaux jeux et le dernier s'intéresse à différents casse-tête.

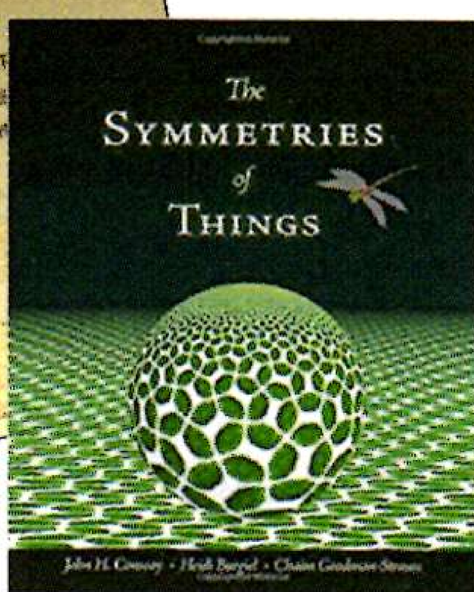
Avec Gardner en D'Artagnan, Conway, Berlekamp et Guy furent les trois mousquetaires de la théorie des jeux combinatoires.

Les ouvrages plus sérieux



Le succès de ses livres concernant les jeux pourrait faire oublier que Conway a publié également des ouvrages de mathématiques pures d'un intérêt capital. En lien avec ses études sur les réseaux de Leech et la découverte des groupes qui portent aujourd'hui son nom, Conway est l'auteur avec Neil James Alexander Sloane, en 1988, de *Sphere Packings, Lattices and Groups* (Springer), un ouvrage de référence sur l'empilement des sphères.

On Quaternions and Octonions (AK Peters et CRC Press, 2003), rédigé avec son étudiant Derek Alan Smith, présente de fascinantes propriétés de la géométrie dans ces algèbres. Les quaternions et les octonions sont des algèbres non commutatives de dimensions respectives 4 et 8, la seconde n'étant même pas associative.



Dans le magistral *Symmetries of Things* (AK Peters et CRC Press, 2008), rédigé avec Heidi Louise Burgiel et Chaim Goodman-Strauss, Conway revient vers sa passion pour les symétries en se plaçant à un niveau largement accessible dans les premiers chapitres (voir *Découpages et Pavages*, Bibliothèque Tangente 64, 2018).

John Conway est aussi l'un des auteurs, avec Robert Turner Curtis, Simon Philips Norton, Richard Parker et Robert Arnott Wilson, de l'*ATLAS of Finite Groups* paru en 1985, puis corrigé et réédité ensuite. Cet ouvrage de référence a fait l'objet de débats en 2015 (quant à la reproductibilité de certaines tables nécessitant des calculs lourds). Des vérifications indépendantes ont depuis pu confirmer tous les résultats publiés.



par Éric Angelini et Michel Criton

Les suites autodescriptives

« 1C 10 1N 1W 1A 1Y. » C'est presque le début de « Look and Say », le levier de création de suites extraordinaire (autodescriptives) inventé par Conway. Il a eu l'idée en 1986 de transformer les descripteurs en ce qu'ils décrivent. Ainsi sa suite 1, 11, 21, 1211... s'étend-elle à l'infini quand on comprend que chaque terme décrit ce qu'il voit immédiatement à sa gauche : 11 voit « un 1 » à sa gauche, 21 voit « deux 1 » à sa gauche immédiate, 1211 voit « un 2 et un 1 » juste avant lui... Ce principe a eu un succès immense auprès des amateurs de mathématiques. On peut commencer une suite comme on veut, mais une fois le premier terme choisi (ici 1), tout est automatique (voir *Tangente* 191, 2019). Conway avait songé aussi à la variante où l'on regroupe, avant de les décrire, les chiffres du nombre qui précède. Ainsi 2020 donne-t-il 2022 (« deux 0, deux 2 »), lequel sera suivi de 1032, puis de 10111213, *etc.* On tombera parfois sur des points fixes, comme 22 (« deux 2 »), ou 10213223, lesquels portent le nom d'*autobiographiques*, car ils se décrivent eux-mêmes.

en bref

La conjecture RATS

Prenez un entier supérieur à 1. Rangez ses chiffres non nuls en ordre croissant (éliminez les éventuels zéros). Retournez le nombre obtenu puis additionnez ces deux nouveaux entiers et rangez les chiffres du résultat dans l'ordre croissant (en éliminant à nouveau les éventuels zéros). Recommencez cette procédure avec le résultat obtenu. Vous êtes en train d'appliquer l'algorithme RATS (« reverse, add, then sort », ou « inversez, ajoutez, puis triez ») inventé par John Conway. Si l'on part de 3, par exemple, on obtient successivement : 3, 6, 12, 33, 66, 123 (n'oubliez pas l'étape « triez » !), **444**, 888, 1 677, 3 489, 12 333, 44 556, 111, 222, **444**... Ensuite, le cycle de huit nombres 888, 1 677, 3 489, 12 333, 44 556, 111, 222, 444 va se répéter indéfiniment.

Mais si l'on part de l'entier 1, on obtient 1, 2, 4, 8, 16, 77, 145, 668, 1 345, 6 677, 13 444, 55 778, 133 345, 666 677, 1 333 444, 5 567 777, 12 333 445, 66 666 677, 133 333 444, 556 667 777, 1 233 334 444, 5 566 667 777, 12 333 334 444, 55 666 667 777, 123 333 334 444... Ensuite, on alterne les nombres de la forme 556...66 667 777 et 123...333 334 444, en insérant à chaque fois un 3 ou un 6 supplémentaire.

Une conjecture énoncée par Conway en 1989 suppose qu'en partant de n'importe quel entier on aboutit toujours soit à un cycle de nombres qui vont se répéter indéfiniment, soit à une suite bien particulière qui diverge, mais avec un « motif » numérique bien précis.

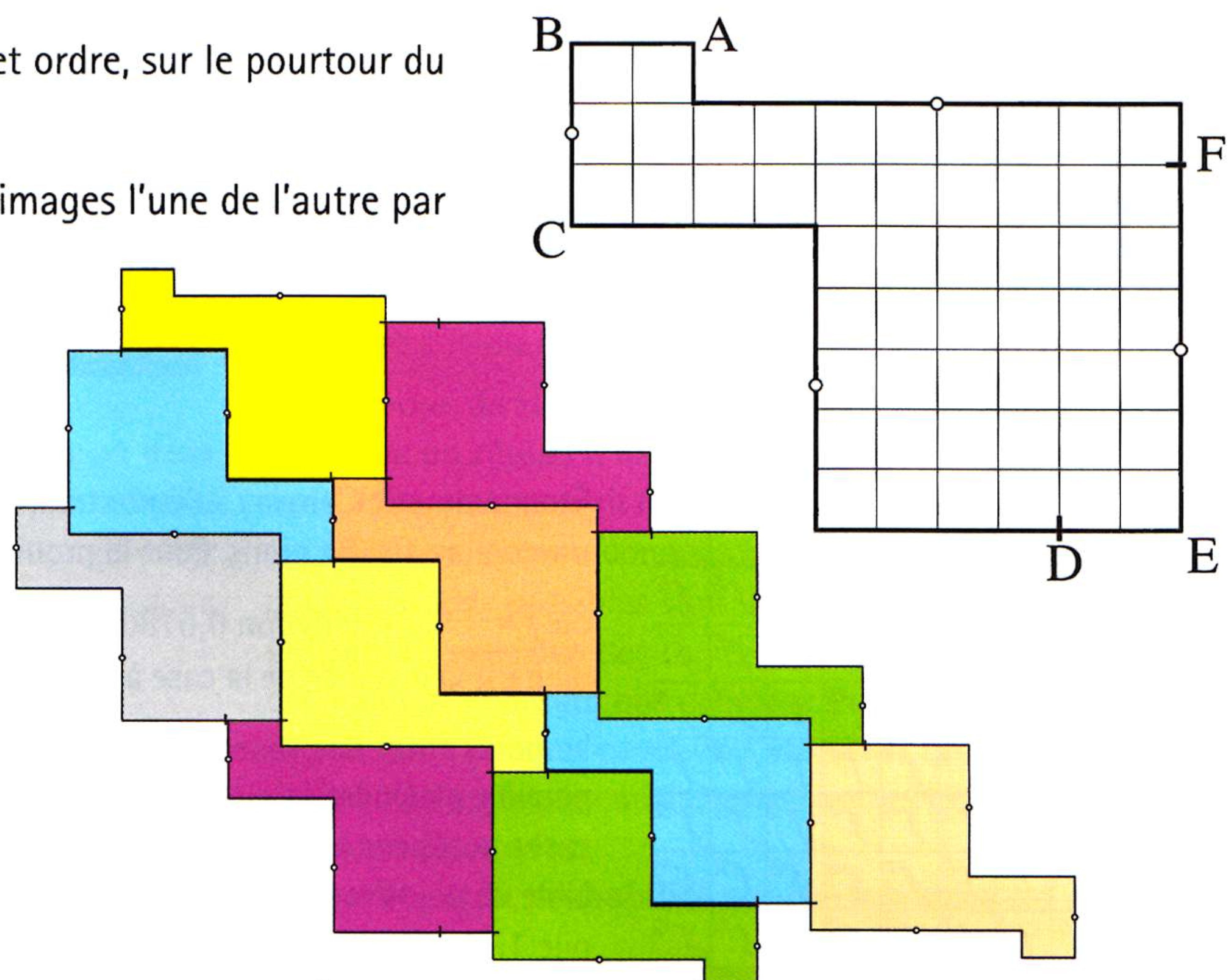
Pavages : le critère de Conway

John Conway s'est intéressé aux pavages du plan (voir *Découpages et Pavages*, Bibliothèque Tangente 64, 2018, pour découvrir certaines de ses contributions majeures). Il a notamment proposé une condition suffisante, mais pas forcément nécessaire, pour qu'un polygone non croisé puisse paver le plan (ce « polygone » pouvant éventuellement être curviligne).

Repérons six points A, B, C, D, E, F, dans cet ordre, sur le pourtour du polygone, tels que :

- les portions [AB] et [DE] du bord soient images l'une de l'autre par une translation ;
- les portions [BC], [CD], [EF] et [FA] du bord possèdent chacune un centre de symétrie (ici [CD] et [FA] ne désignent pas un segment, mais une réunion de segments) ;
- trois au moins des six points A, B, C, D, E, F soient distincts.

On peut alors réaliser un pavage avec la « brique » ci-contre, pavage qui ne fait intervenir que des translations et des rotations de 180°.



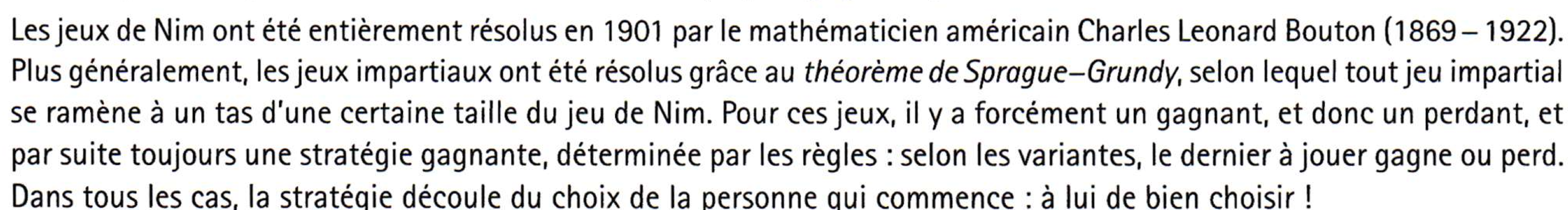
par Nicolas Graner

en bref

Savoir perdre quand on le doit

Conway a consacré une grande partie de son activité à l'étude de la théorie des jeux, dont les jeux impartiaux et les jeux de Nim (voir en page 44). Un *jeu impartial* se joue à tour de rôle. Les coups autorisés dépendent uniquement de la position, et pas du joueur dont c'est le tour. C'est le cas des jeux de Nim, du jeu de Grundy, du jeu de Wythoff, ou encore de Sprouts (voir *Jeux mathématiques*, Bibliothèque Tangente 20, 2004 et *Théorie des jeux*, Bibliothèque Tangente 46, 2013).

Un jeu qui n'est pas impartial est qualifié de *partisan*. Les échecs ou le jeu de go ne sont pas impartiaux, car les coups possibles sont différents pour les deux joueurs, chacun ne pouvant jouer que les pièces de sa propre couleur.
Dans un jeu impartial, le joueur qui fait le dernier mouvement gagne la partie. Lorsque la convention inverse est adoptée, celui qui fait le dernier mouvement perd ; on parle alors de la version *misère* ou *qui perd gagne* du jeu.



Les jeux de Nim ont été entièrement résolus en 1901 par le mathématicien américain Charles Leonard Bouton (1869 – 1922). Plus généralement, les jeux impartiaux ont été résolus grâce au *théorème de Sprague–Grundy*, selon lequel tout jeu impartial se ramène à un tas d'une certaine taille du jeu de Nim. Pour ces jeux, il y a forcément un gagnant, et donc un perdant, et par suite toujours une stratégie gagnante, déterminée par les règles : selon les variantes, le dernier à jouer gagne ou perd. Dans tous les cas, la stratégie découle du choix de la personne qui commence : à lui de bien choisir !

Références :

- *Les Jeux de Nim* de Jacques Bouteloup, Association pour le développement de la culture scientifique, 1996.
- *Stratégies magiques au pays de Nim*. Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science* 377, mars 2009.

In memoriam

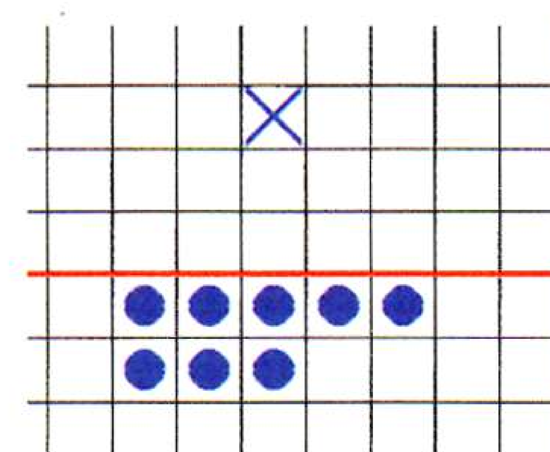
Il veut faire des maths depuis qu'il a onze ans.
Les nombres peu banals au début vont lui plaire :
Surréels, transfinis, et bien sûr les très grands.
Vers ses trente ans, il crée un monde cellulaire
Qui en un rien de temps devient très populaire.
Un de ses livres fait gagner à bien des jeux,
Les autres sont plutôt pour ses pairs, les matheux.
Il prouve par l'absurde et par la pandémie
Que l'on peut aussi perdre au grand jeu de la vie.

Les soldats de Conway

Au jeu du solitaire, des pions sont placés dans les cases d'une grille carrée. Un pion peut se déplacer horizontalement ou verticalement en sautant par-dessus un pion voisin ; le pion sauté est retiré. John Conway s'est demandé s'il est possible d'atteindre une case donnée, située au-dessus d'une ligne, en plaçant initialement des pions au-dessous de cette ligne.

On atteint la première ligne en un saut.

On atteint la deuxième ligne en trois sauts.



Configuration pour atteindre la troisième ligne.

					f^0					
f^6	f^5	f^4	f^3	f^2	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	f^6
f^7	f^6	f^5	f^4	f^3	f^2	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7
f^8	f^7	f^6	f^5	f^4	f^3	f^4	f^5	f^6	f^7	f^8
f^9	f^8	f^7	f^6	f^5	f^4	f^5	f^6	f^7	f^8	f^9
f^{10}	f^9	f^8	f^7	f^6	f^5	f^6	f^7	f^8	f^9	f^{10}
f^{11}	f^{10}	f^9	f^8	f^7	f^6	f^7	f^8	f^9	f^{10}	f^{11}
f^{12}	f^{11}	f^{10}	f^9	f^8	f^7	f^8	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}
f^{13}	f^{12}	f^{11}	f^{10}	f^9	f^8	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}

Étonnamment, Conway a démontré qu'on ne peut pas atteindre la cinquième rangée avec un nombre fini de pions. Pour le prouver, on donne à chaque case un « poids » égal à f^n, où $f=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (environ 0,61803) vérifie $f^2+f-1=0$ (c'est l'inverse du nombre d'or) et où n est la distance de la case à la cible en se déplaçant horizontalement ou verticalement.

Le poids total des cases occupées n'augmente jamais quand on déplace un pion. Pour pouvoir atteindre la cible, dont le poids est $f^0=1$, il faut donc que le poids total des cases occupées au départ vaille au moins 1. Or, si l'on place une ligne à k rangées sous la cible, le poids total du demi-plan infini sous la ligne vaut f^{k-5}. Pour k = 5, ce poids vaut pile 1. Un nombre *fini* de pions situés sous la ligne a donc toujours un poids strictement inférieur à 1 et ne permet pas d'atteindre la cible.

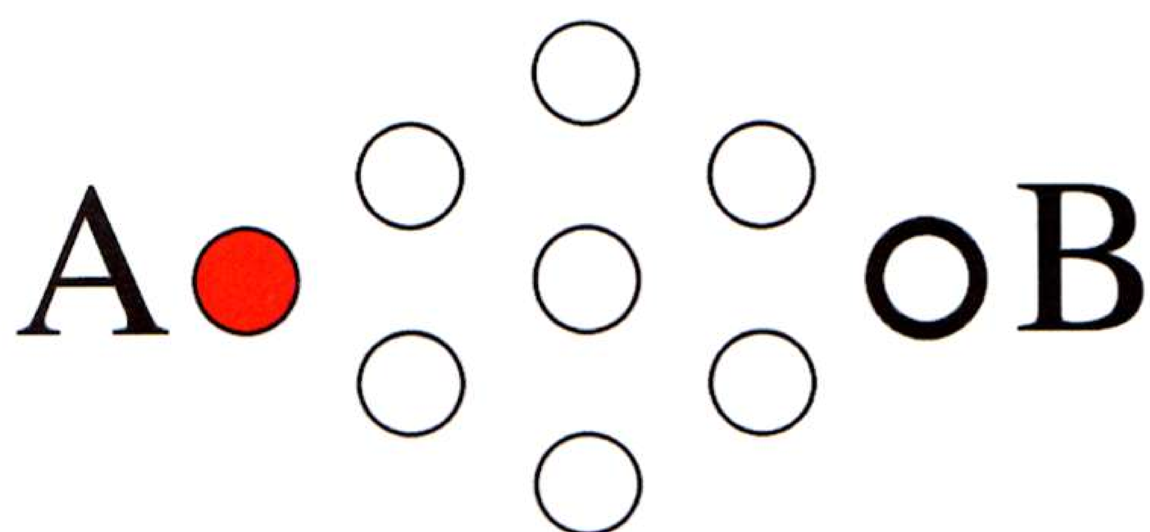
La percolation, ça percute !

Le passage de l'eau dans de la mouture de café, le passage d'un courant électrique dans un milieu conducteur, la progression d'une épidémie dans une population… sont autant de situations où intervient la traversée d'un milieu

par Michel Criton

Cet arboretum possède de magnifiques spécimens provenant du monde entier. Les neuf plus beaux sont disposés en losanges. Le conservateur vient de constater que les racines de l'arbre A sont attaquées par une bactérie particulièrement virulente, ce qui le condamne malheureusement à dépérir puis à mourir. Cette maladie se transmet de proche en proche par les racines, chaque arbre malade ne pouvant la transmettre qu'aux plus proches. Par ailleurs, les spécialistes savent que les arbres ont exactement une chance sur deux d'être naturellement résistants à la maladie et donc de ne pas êtres infectés.

1. Quelle est la probabilité pour que l'arbre B, supposé non résistant à la maladie, finisse par être infecté ?



Pour que la maladie n'atteigne pas l'arbre B, il faut et il suffit qu'il existe un « barrage d'arbres résistants » bloquant la progression de la maladie vers l'arbre B. Un tel barrage reliera deux côtés du losange.


© AVTG - stock.adobe.com

Cette situation n'est pas sans rappeler le jeu de Hex, où deux joueurs s'affrontent pour créer un chemin reliant deux bords opposés d'un tableau en forme de losange, le but étant de créer un chemin formé de pions d'une seule couleur reliant les deux bords de cette couleur.

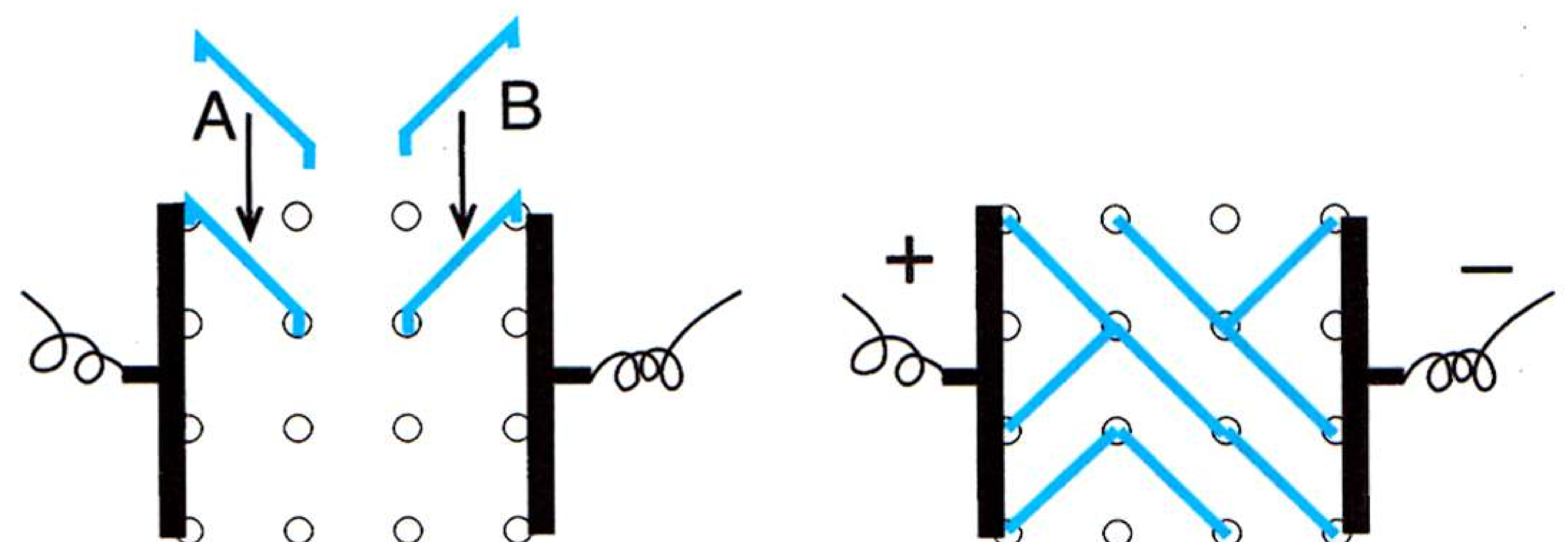


Hex a été co-inventé par le physicien danois Piet Hein (1905–1996) et le mathématicien américain John Nash (1928–2015). Il ne peut y avoir de partie nulle : on finit obligatoirement par former soit un chemin reliant les deux bords blancs (Blanc gagne), soit un chemin reliant les deux bords noirs (Noir gagne).

+ Et maintenant, percolons…

Supposons maintenant que le plateau du jeu de Hex, entièrement recouvert de pions blancs et noirs, représente un agrégat non homogène de roches dont certaines sont poreuses (les bords blancs et les pions blancs) et d'autres imperméables (les bords noirs et les pions noirs). Un fluide pourra-t-il traverser ce milieu ? La réponse est positive si Blanc gagne, et négative s'il existe un chemin de pions noirs reliant les deux bords noirs et « faisant barrage ». Dans la pratique, c'est évidemment plus complexe, car il faut prendre en compte la viscosité du fluide, la pression qu'il subit, la perméabilité plus ou moins importante du matériau poreux…

Mais ce plateau pourrait aussi représenter un milieu non homogène dont certains éléments sont conducteurs de l'électricité (les bords et les pions blancs) et d'autres résistants (les bords et les pions noirs). Dans un cas, le courant passe entre les deux bords blancs, et dans l'autre, il ne passe pas.



On dispose de deux électrodes métalliques entre lesquelles se trouve un réseau à mailles carrées de trois petits carrés sur trois. Pour chaque petit carré élémentaire de ce réseau, on peut enficher une barette conductrice sur une des diagonales (les deux positions possibles sont illustrées en A et B.

On enfiche neuf barettes (une par petit carré), en choisissant à chaque fois au hasard une des deux diagonales (cf. la figure de droite, où le courant passe de l'électrode de gauche à celle de droite). On applique ensuite une tension électrique aux bornes des deux électrodes.

2. Quelle est la probabilité pour que le courant passe ?

Solutions en page 52

par Michel Criton

Santé !

19401 - Les neuf ânes ♦



Neuf ânes évoluent dans un enclos carré. Ils sont malades, et il convient de les isoler. **Tracez deux carrés pour que chaque âne soit séparé des autres.**

19402 - Le médicament ♦

Mathias est souffrant. Il doit prendre trente-six gouttes d'un médicament diluées dans un grand verre d'eau. Il boit la moitié du verre, mais refuse d'ingérer le reste en disant que le goût est trop amer.
Sa mère complète alors le verre avec du jus d'orange. Elle mélange bien le tout et demande à son fils de boire le contenu du verre.
Mathias boit les deux tiers du verre, puis jette le reste dans l'évier.
Combien de gouttes du médicament a-t-il absorbées au total ?

19403 - Le xerus malade ♦

Vincent prépare une solution médicamenteuse pour son petit rongeur malade. Il dispose de trois récipients A, B et C qui ont des contenances respectives de 7, 4 et 3 centilitres. Le mélange est préparé ainsi : à chaque fois que Vincent verse un récipient dans un autre, il arrête soit lorsque le récipient qui verse est vide, soit lorsque le vase qui reçoit est plein.


© Jearu - stock.adobe.com

Le xerus est un petit rongeur, proche de l'écureuil, qui vit principalement sur le continent africain.

Au départ, le récipient A est plein et les deux autres sont vides. Vincent effectue les transvasements suivants : A dans B, B dans C, C dans A, B dans C, A dans B et B dans C.
Combien de centilitres y a-t-il alors dans le récipient B ?

19404 - La grippe ♦

Dans une ville, des individus sont atteints par une épidémie de grippe. Au cours du premier mois, 20 % de la population a contracté le virus tandis que 80 % demeuraient en bonne santé. Le mois suivant, 20 % des malades se sont rétablis et 20 % des personnes en bonne santé ont contracté la maladie.
Quelle fraction de la population est en bonne santé à la fin du deuxième mois ?

19405 - L'épidémie ♦♦

Une région carrée de 2016 km par 2016 km est divisée en 2016^2 cellules dont chacune est un carré de côté 1 km. Certaines cellules sont contaminées par un virus. Chaque mois, le virus se propage aux cellules qui ont au moins deux côtés en commun avec les cellules contaminées.

Trouvez le nombre maximal de cellules contaminées, quelles que soient leurs positions, si l'on sait que l'épidémie ne pourra pas s'étendre à la région entière.

19406 - La ferme apocalyptique ♦

Il était une fois une ferme dans laquelle vivaient en nombre égal cochons, vaches, lapins et chevaux. Survint une terrible épidémie et l'on entendit les plaintes des fermiers :

Le père : « *Une vache sur cinq est morte !* »

La mère : « *Il y a autant de chevaux morts que de cochons survivants…* »

Le fils : « *La proportion des lapins survivants parmi les animaux encore en vie est de 5/14.* »

La grand-mère, passant par là, demande **combien de lapins sont morts.**

19407 - Le club de sport ♦♦

Dans notre club de sport (qui compte moins de soixante adhérents), en janvier, la grippe a sévi, mais cela ne nous a pas empêchés de travailler.

Le premier jour, il manquait une personne et nous avons travaillé par groupes de deux.

Le deuxième jour, il en manquait deux et nous avons travaillé par groupes de trois.

Le troisième jour, il en manquait trois et nous avons travaillé par groupes de quatre.

Le quatrième jour, il en manquait quatre et nous avons travaillé par groupes de cinq.

Combien sommes-nous d'adhérents au club ?

19408 - La bosse des maths ♦♦

Une épidémie de bosse des maths frappe le Mathistan. Le nombre de malades est $M(1) = 1$ le premier jour, $M(2) = 14$ le deuxième jour et $M(3) = 43$ le troisième jour.

Puis, pour tout J au moins égal à 4, $M(J)$ s'obtient par récurrence en calculant le reste de la division par 2012 de l'expression :

$4\,M(J-1) - 5\,M(J-2) + 2\,M(J-3)$.

Ainsi, $M(4) = 104$, $M(5) = 229$, $M(6) = 482$, $M(7) = 991$, $M(8) = 0$, $M(9) = 33$…

Par malheur, si l'épidémie devait durer plus de cinq ans et demi, alors que serait M(2012), le nombre de malades le deux mille douzième jour ?

19409 - Analyses ♦♦

Le docteur Lepot dirige un laboratoire d'analyses médicales. Pour tester la présence d'un virus, il possède une méthode très fiable, qui détecte toute trace de virus dans un échantillon. Cependant, cette méthode est très onéreuse, aussi est-il conduit à limiter le nombre d'analyses. Il mélange quelques gouttes de sang provenant de plusieurs patients, puis il teste la présence du virus dans le mélange. S'il n'y a pas de trace, il sait que ce groupe de patients n'est pas atteint par le virus, et il n'a effectué qu'une seule analyse.

Il a devant lui cinq éprouvettes contenant du sang suspect ; il sait que deux exactement de ces éprouvettes contiennent le virus.

Combien doit-il effectuer d'analyses, au minimum, pour déterminer quelles sont les deux éprouvettes contenant le virus ?



19410 - Diphages et triphages ♦♦♦

Deux microbes ont été récemment découverts. Ils se reproduisent d'une façon très particulière. Le mâle, un *diphage*, possède deux récepteurs, et la femelle, un *triphage*, trois récepteurs. Lorsqu'une culture de diphages et de triphages est irradiée avec un rayon psi, l'un des récepteurs d'un diphage ou d'un triphage absorbe la particule (la probabilité est la même pour chaque récepteur). Si c'est un diphage, il se change en un triphage, et si c'est un triphage, il se scinde en deux diphages.

Initialement, on a un seul diphage et on irradie la culture n fois avec des particules psi.

Quel sera le nombre moyen de diphages après ces n irradiations ?

SOLUTIONS EN PAGE 51

SOURCES DES PROBLÈMES

- Rallye mathématique de Loire-Atlantique 1996 (19401)
- Championnat des jeux mathématiques et logiques 2015 et 2012 (19402, 19408)
- Revue *Enigma* 4, mars–avril 2006 (19403)
- South Mathematical Olympiad, Afrique du Sud, 2015 (19404)
- D'après World Federation of Mathematics Competition 2016 (19405)
- Rallye de mathématiques de l'Académie de Nice 2010 (19406)
- Manuel *Aventure Math Seconde*, POLE, 2010 (19407)
- *Double Détente*, Bernard Novelli, POLE, 1996 (19409)
- D'après *American Mathematical Monthly*, Donald Knuth, 1978 (19410)



par Élisabeth Busser et Jean-Jacques Dupas

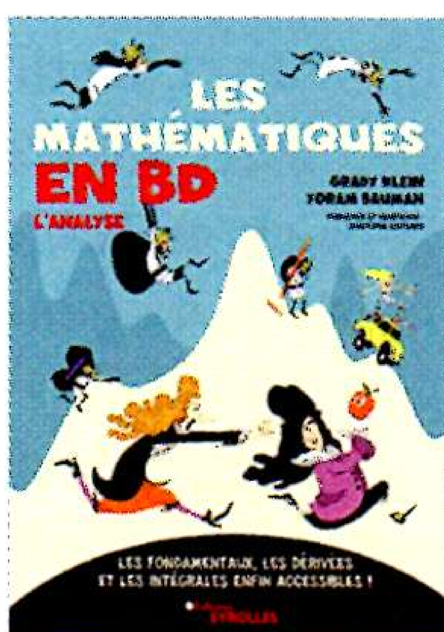
notes de lecture

Apprivoiser les notions de base de l'analyse par le dessin et l'humour

Le pari d'expliquer en BD des notions mathématiques un peu subtiles était risqué. Le texte de Yoram Bauman, économiste habitué des « standup » sur sa discipline, et les illustrations de Grady Klein, dessinateur spécialisé dans la narration de sujets complexes, ont contribué à la réussite de cette entreprise.

Le thème général, l'analyse (niveau terminale et un peu au-delà), est développé en trois parties : un survol, les dérivées, les intégrales. Les notions essentielles sont là, vitesse, dérivée, aires, intégrales, les théorèmes principaux aussi, le tout prenant forme sous nos yeux avec des dessins évocateurs et de nombreuses trouvailles graphiques. On n'oublie pas non plus des incursions dans l'histoire des mathématiques, avec Newton et Leibniz bien sûr, mais aussi Archimède et le principe d'exhaustion, Cavalieri et ses indivisibles...

Cet ouvrage, sous les dehors incontestablement ludiques de ses traits d'humour, présente des mathématiques sérieuses et tente de faire comprendre leurs subtilités par le dessin. Il aidera sans doute lycéens et étudiants, et tous les amateurs, à apprivoiser les notions de base de l'analyse. **É.B.**



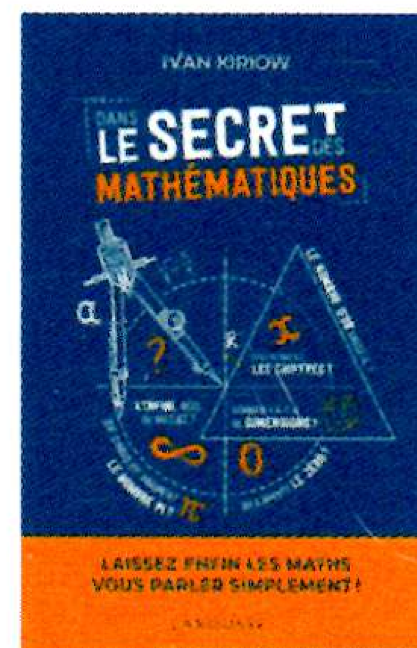
Les mathématiques en BD.
Grady Klein et Yoram Bauman,
Eyrolles, 214 pages, 2019, 20 euros.

Une remise à niveau sympa

Y aurait-il un secret à connaître pour comprendre les mathématiques ? Euclide rappelait déjà à son pharaon qu'il n'y a pas de *« voie royale »*. Le seul secret, c'est le travail ! Cela suffit-il cependant pour comprendre toutes les mathématiques ? John von Neumann lui-même affirmait : *« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'habitue seulement à elles. »* C'est d'ailleurs une citation de ce mathématicien hongrois qui ouvre le livre : *« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne mesurent pas à quel point la vie est compliquée. »* L'ouvrage est à l'image de ce trait d'esprit : sympathique et plein d'humour.

Il possède cependant un petit défaut : le dernier polyèdre qui, dans le *Timée* de Platon, représente l'univers n'est pas l'icosaèdre mais le dodécaèdre, si difficile à construire avec ses douze faces pentagonales.

On préférera retenir les thèmes classiques de la vulgarisation qui sont abordés : les chiffres, le zéro, le nombre d'or, les nombres premiers, π, l'infini, les géométries non euclidiennes, les limites, le chaos, les fractales, l'incomplétude... Les lecteurs fidèles de *Tangente* n'apprendront pas grand-chose, mais l'ouvrage offre, avec clarté, humour et de nombreuses références culturelles populaires, une petite remise au niveau zéro des mathématiques à ceux qui en ont besoin. On y croise aussi bien Gotlib que Chuck Norris. **J.-J. D.**



Dans le secret des mathématiques.
Yvan Kiriow, Larousse, 320 pages,
2020, 18,95 euros.

en bref

Un jeu montrant la richesse de la combinatoire

Radical X est un jeu peu encombrant, qui se présente sous la forme d'un parallélépipède rectangle dont les arêtes font moins de 5 cm. Vous pourrez l'emporter partout. Les chaînes de calcul vont par contre se déployer sur un espace assez vaste (comptez 60 cm par 60 cm au minimum).

À l'intérieur se trouvent cent vingt cartes, mais pas de règle du jeu ! Il faut aller la consulter sur le site **www.radical-x.com**. L'auteur joue ainsi à fond la carte du numérique, avec une application pour compter les points et une calculette orientée vers le jeu.

Radical-X se joue à deux joueurs, ou par équipes. Certaines cartes représentent des nombres au recto, et une définition textuelle de ce nombre au verso (comme « Nombre de quilles au Bowling » pour « 10 »). On trouve aussi des cartes « opérateurs », qui forment le cœur du jeu. Un « opérateur » permet d'assembler un, deux ou trois nombres. Quelques cartes spéciales complètent la panoplie.

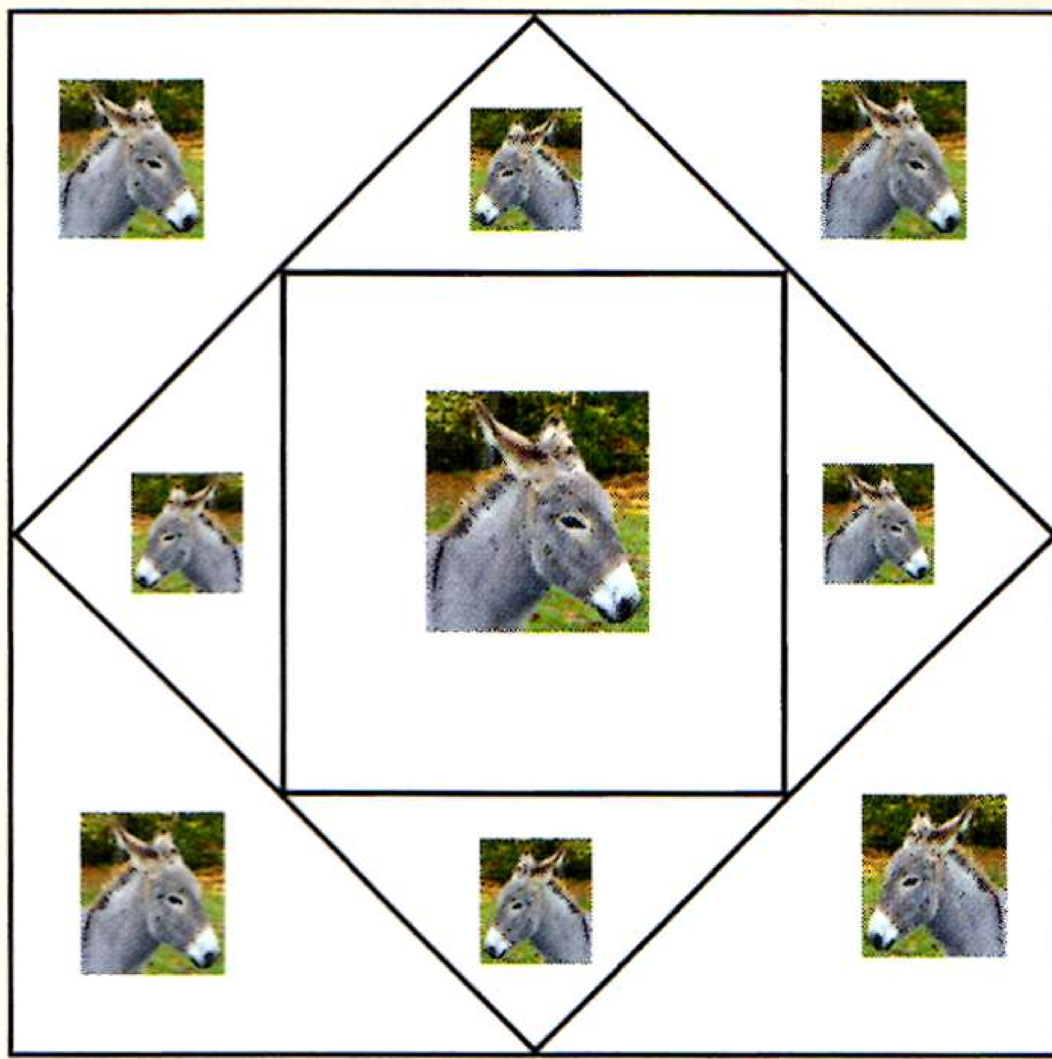
La règle du jeu décrit, en long en large et en travers comment se servir des cartes, avec (heureusement) de nombreuses mises en situation. Par contre, la mise en place et les phases du jeu ne nous ont pas paru très explicites sur le site. Un autre point discutable est que l'on compte les points au fur et à mesure, à chaque tour, contrairement à un jeu où le gagnant est désigné en fin de partie.

Le jeu apparaît vite assez intéressant, surtout d'un point de vue pédagogique, par la combinatoire importante qu'il met en œuvre. Les assemblages de blocs évoquent fortement la programmation. Si le jeu offre de nombreuses possibilités, en montrant la richesse de la combinatoire numérique, il demande un petit investissement au départ.
J.-J. D.



Radical X.
Éric Juban,
Préférence-Jeu, 2019,
19 euros.

19401 -



19402 - Mathias a d'abord absorbé la moitié des gouttes. Après que sa mère a complété le contenu du verre avec du jus d'orange, il absorbe encore les deux tiers des dix-huit gouttes restantes. Au total, il en aura absorbé 18 + 12, soit **30**.

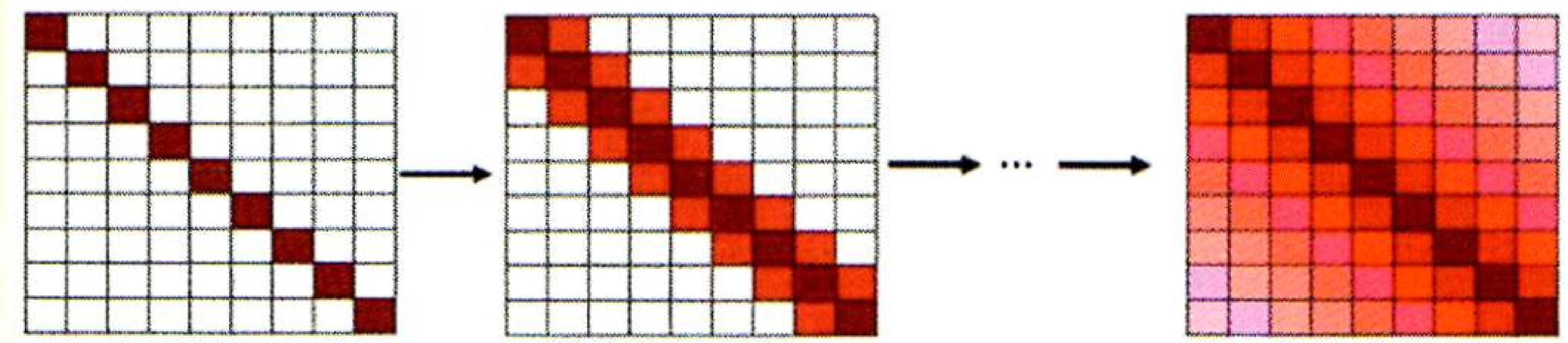
19403 -

Transvasements	Récipient A	Récipient B	Récipient C
Situation initiale	7	0	0
A dans B	3	4	0
B dans C	3	1	3
C dans A	6	1	0
B dans C	6	0	1
A dans B	2	4	1
B dans C	2	2	3

Après les six transvasements, il y a **deux centilitres** dans B.

19404 - Durant le deuxième mois, 20 % des malades se rétablissent, soit 0,2 × 0,2 = 4 % de la population. Des 20 % de malades du premier mois, il restera donc 16 % de malades. Mais 20 % des individus en bonne santé tombent malades, soit 20 % de 80 % de la population, ce qui correspond à 0,2 × 0,8 = 16 % de la population. À la fin du deuxième mois, les malades représenteront donc 16 % + 16 %, soit 32 %, et les individus en bonne santé 100 % – 32 %, soit **68 % de la population**.

19405 - Lorsque l'épidémie se propage, le périmètre de la zone contaminée ne peut pas augmenter, car avec chaque cellule nouvellement contaminée ce périmètre perd au moins deux petits côtés (partagés avec des cellules préalablement contaminées), et gagne au plus deux nouveaux petits côtés. Si au plus deux mille quinze cellules sont contaminées au départ, le périmètre initial des zones contaminées est au maximum égal à 2015 × 4, et le périmètre n'atteindra jamais 2016 × 4, qui est le périmètre de la région entière. La diagonale principale contaminée de la région représentée se propage de façon à couvrir toute la région, montrant ainsi que deux mille seize cellules contaminées peuvent éventuellement provoquer la propagation de la maladie à toute la région. La réponse est donc **2015**.



19406 - Initialement, les nombres de cochons, de vaches, de lapins et de chevaux sont égaux. Supposons que l'on ait un effectif égal à 100 pour chaque. Il resterait alors quatre-vingts vaches.
Désignons par c le nombre de cochons survivants. Le nombre de chevaux survivants est égal à $100 - c$. Appelons de même u le nombre de lapins survivants. Le nombre total d'animaux survivants est égal à $c + u + 80 + (100 - c)$, c'est-à-dire à $u + 180$. Mais $u / (u + 180) = 5 / 14$, d'où $u = 100$.
Il y a le même nombre de lapins qu'au départ : **aucun lapin n'est mort**.

19407 - Le nombre N de membres du club est à la fois un nombre impair, un multiple de 3 augmenté de 2, un multiple de 4 augmenté de 3 et un multiple de 5 augmenté de 4. En dressant la liste de ces nombres, on vérifie que seul **N = 59** convient.

19408 - On observe que $M(J) = -3J - 12 + 8 \times 2^J$. Or, d'après le petit théorème de Fermat, 2^{502} a pour reste 1 dans la division par 503. On en déduit que 2^{2012} a pour reste 16 dans cette division et que $8 \times 2^{2012} - 128$ est divisible par 503. L'entier M(2012) a donc pour reste 0 – 12 + 128 = 116 dans la division par 2012. Le nombre de malades sera donc égal à **116** le deux mille douzième jour.

19409 - Appelons A, B, C, D, E les cinq éprouvettes. Le docteur teste d'abord le mélange A–B. S'il est négatif, il ne reste plus que trois suspects et en deux essais, il saura lesquels. Si le mélange A–B est positif, il teste le mélange C–D :
- si C–D est positif, il sait qu'il y a un suspect dans A–B et l'autre dans C–D. En deux essais, il saura déterminer lesquels ;
- si C–D est négatif, en testant successivement A et B, il saura déterminer les deux porteurs de virus.

Dans tous les cas, **quatre tests suffisent**. Les réponses aux tests étant oui ou non, l'arbre des réponses possibles après trois tests ne pourra contenir que huit branches ; comme il existe dix possibilités au départ, trois tests ne peuvent suffire dans le pire des cas. La méthode est donc optimale.

19410 - Soient d_n et t_n le nombre moyen de diphages et de triphages après n irradiations par une particule psi. Le nombre r_n de récepteurs est alors égal à $2d_n + 3t_n$. On a $d_{n+1} - d_n = 2(3t_n / r_n) - 2d_n / r_n = (6t_n - 2d_n) / r_n$ et $t_{n+1} - t_n = 2d_n / r_n - 3t_n / r_n = (2d_n - 3t_n) / r_n$.
On a donc $r_{n+1} - r_n = 1$. On en déduit que $r_n = n + 2$.
On montre que $d_{n+1} - 2t_{n+1} = (n + 4)(d_n - 2t_n) / (n + 2)$. Les premières valeurs de d_n sont **1, 0, 2, 1, 9/5**. Ensuite, on a $\mathbf{d_n = 2(n + 2) / 7}$.

Solution de la nouvelle de la page 27

Solution en trois semaines : la première étape est identique à celle que propose Bêta. À l'issue de celle-ci, il reste dix candidats, que l'on peut numéroter de 1 à 10. On teste ensuite par exemple 1 avec 2, 1 avec 3, 2 avec 3, 4 avec 5, 4 avec 6, 5 avec 6, 7 avec 8 et 9 avec 10 pour exploiter en parallèle les huit simulateurs. À la fin de cette étape, on a le meilleur de $\{1, 2, 3\}$, de $\{4, 5, 6\}$, de $\{7, 8\}$ et de $\{9, 10\}$. Il reste donc quatre vaccins (renumérotés de 1 à 4) ; on teste de la façon suivante : 1 avec 2, 1 avec 3, 1 avec 4, 2 avec 3, 2 avec 4, 3 avec 4. Il n'y a besoin que de six tests qui peuvent être exécutés en parallèle sur les simulateurs. Cette dernière étape permet de trouver en une séquence le meilleur des restants. **Trois étapes (donc trois semaines) suffisent au total.**

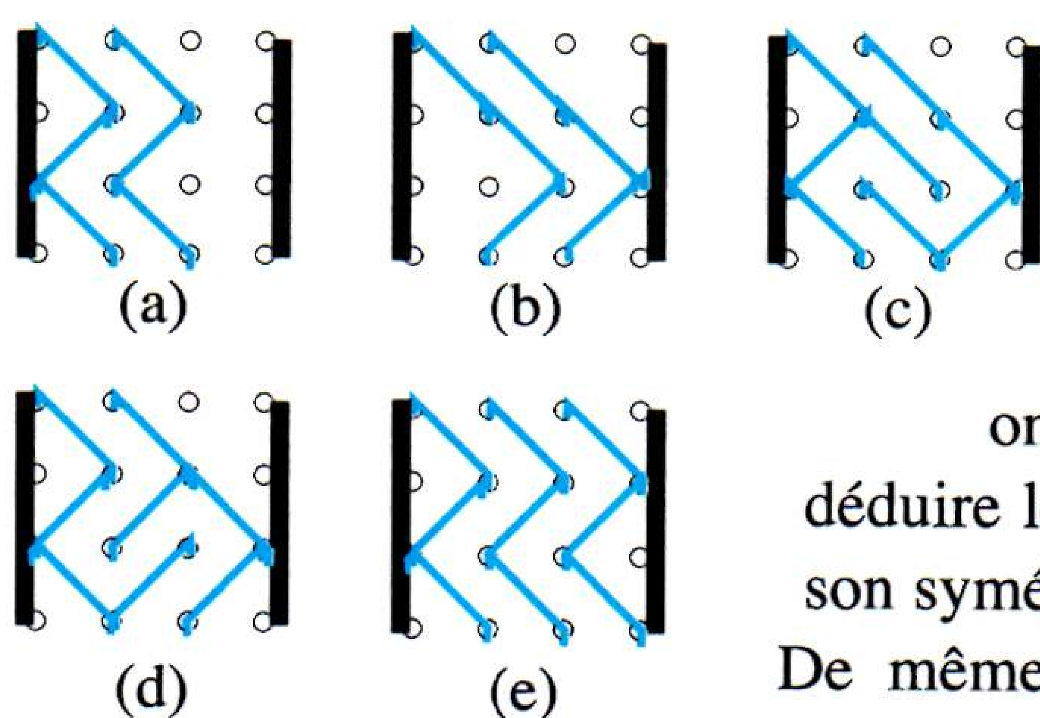
Pour avoir le résultat en une semaine : il faut tester chaque vaccin contre les autres, donc 1 avec 2 à 18, 2 avec 3 à 18…, ce qui représente $17 + 16 + \ldots + 1 = 153$ tests. Il faudrait donc autant de simulateurs.

Pour avoir le résultat en deux semaines : en regroupant les vaccins par trois, on peut connaître le meilleur de $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{10, 11, 12\}$, $\{13, 14, 15\}$ et $\{16, 17, 18\}$ en réalisant $3 \times 6 = 18$ tests avec autant de simulateurs. Restent six vaccins en lice, qui peuvent être comparés en une semaine en utilisant quinze simulateurs. **Dix-huit appareils sont donc suffisants.** Avec dix-sept simulateurs, il pourrait également ne rester que six vaccins après la première étape mais ce n'est pas une certitude – si l'on teste que 16 est moins bon que 17 et 18, on est obligés de garder 17 et 18 pour l'étape 2, soit sept vaccins, qui nécessitent vingt et un simulateurs pour être testés en une semaine.

Solution des mathématiques récréatives de la page 47

1. Pour les sept arbres situés entre A et B, il y a 2^7 possibilités selon que chacun d'eux est ou non résistant à la maladie. On dénombre 49 cas où l'arbre B sera contaminé et 79 cas où il sera indemne. La probabilité demandée est donc égale à **49 / 128**, soit un peu plus de 38 %.

2. Il est plus facile de dénombrer les cas où le courant ne passe pas. Il faut et il suffit alors qu'il existe un passage isolant du bas vers le haut ou du haut vers le bas du réseau. Un tel passage ne peut exister que s'il est bordé de barettes conductrices, puisque l'on doit choisir une diagonale pour chaque carré élémentaire.



Les cas du type (a) sont au nombre de 2^3 (il reste trois barettes à placer). En comptant les symétries possibles, on arrive à 4×2^3, mais il faut déduire le cas (e) compté deux 2 fois, et son symétrique.

De même, les cas du type (b) sont au nombre de 2^3, soit 4×2^3 en comptant les symétries.

Les cas du type (c) sont au nombre de 2, soit 4×2 en comptant les symétries. De même pour les cas du type (d).

On a donc au total $8 \times 2^3 + 8 \times 2 - 2 = 78$ cas où le courant ne passe pas, sur $2^9 = 512$ cas au total. La probabilité pour que le courant passe est donc égale à $1 - 78 / 256 =$ **217 / 256**.

tangente

N°194 JUIN-JUILLET 2020

Publié par Les Éditions POLE
SAS au capital de 43 120 euros
Siège : 80 bd Saint-Michel – 75006 Paris
Commission paritaire : 1021 T 80883
Dépôt légal à parution
ISSN : 0987 - 0806

Directeur de Publication
Gilles COHEN

Directrice de la rédaction
Martine BRILLEAUD

Rédacteur en chef
Bertrand HAUCHECORNE

Secrétariat de rédaction
Édouard THOMAS assisté de Monique MARCHAND
courrierdeslecteurs@poleditions.com

Comité de rédaction
Fabien AOUSTIN Jacques BAIR
Stella BARUK André BELLAÏCHE
Philippe BOULANGER Élisabeth BUSSER
Michel CRITON Jean-Jacques DUPAS
Robert FERRÉOL Daniel JUSTENS
François LAVALLOU Jean-Louis LEGRAND
Hervé LEHNING Marie-José PESTEL
Norbert VERDIER Alain ZALMANSKI

Ont collaboré à ce numéro
Éric ANGELINI Anne BOYÉ
Nicolas GRANER Kylie RAVERA
Claudine SCHWARTZ Bernard YCART

Maquette
Natacha LAUGIER Noémie SOUILLARD

Crédits
couverture : © cooperr - shutterstock.com

Publicité au journal
pub@poleditions.com

Abonnements
Tel. : 02 32 22 13 93 – abo@poleditions.com

Service des ventes
Agence BO Conseil
Otto Borscha, 06 07 26 79 25
Responsable titres : Terry Mattard, 09 67 32 09 34

Ce numéro de *Tangente* a été imprimé
BLG Toul - Z. I. Croix de Metz
Route de Villiers St Étienne
54200 Toul

NOUVEAU !
l'abonnement numérique
INTÉGRAL MATHS

pour seulement **3,99 €** par mois

28 nos de Tangente

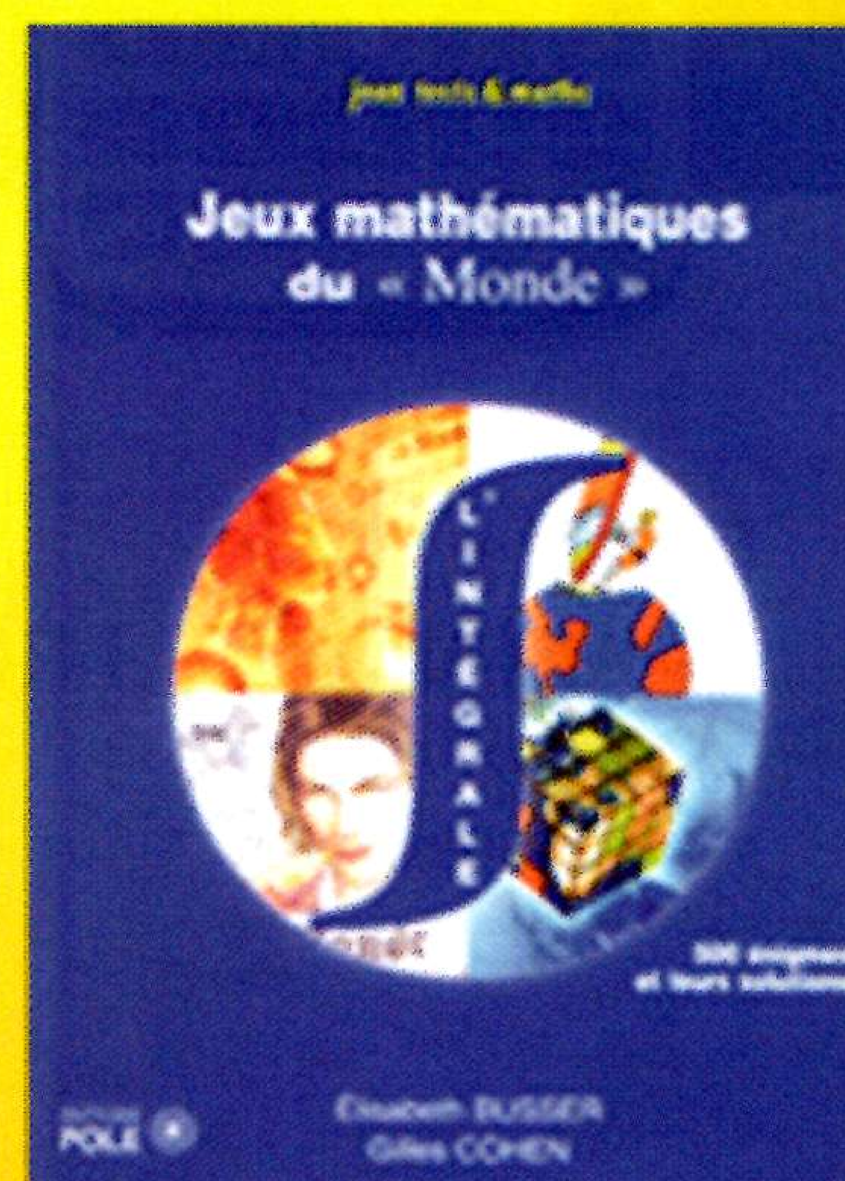


sur **tangente-mag.com**



17 hors séries

Et aussi... sur **affairedelogique.com**



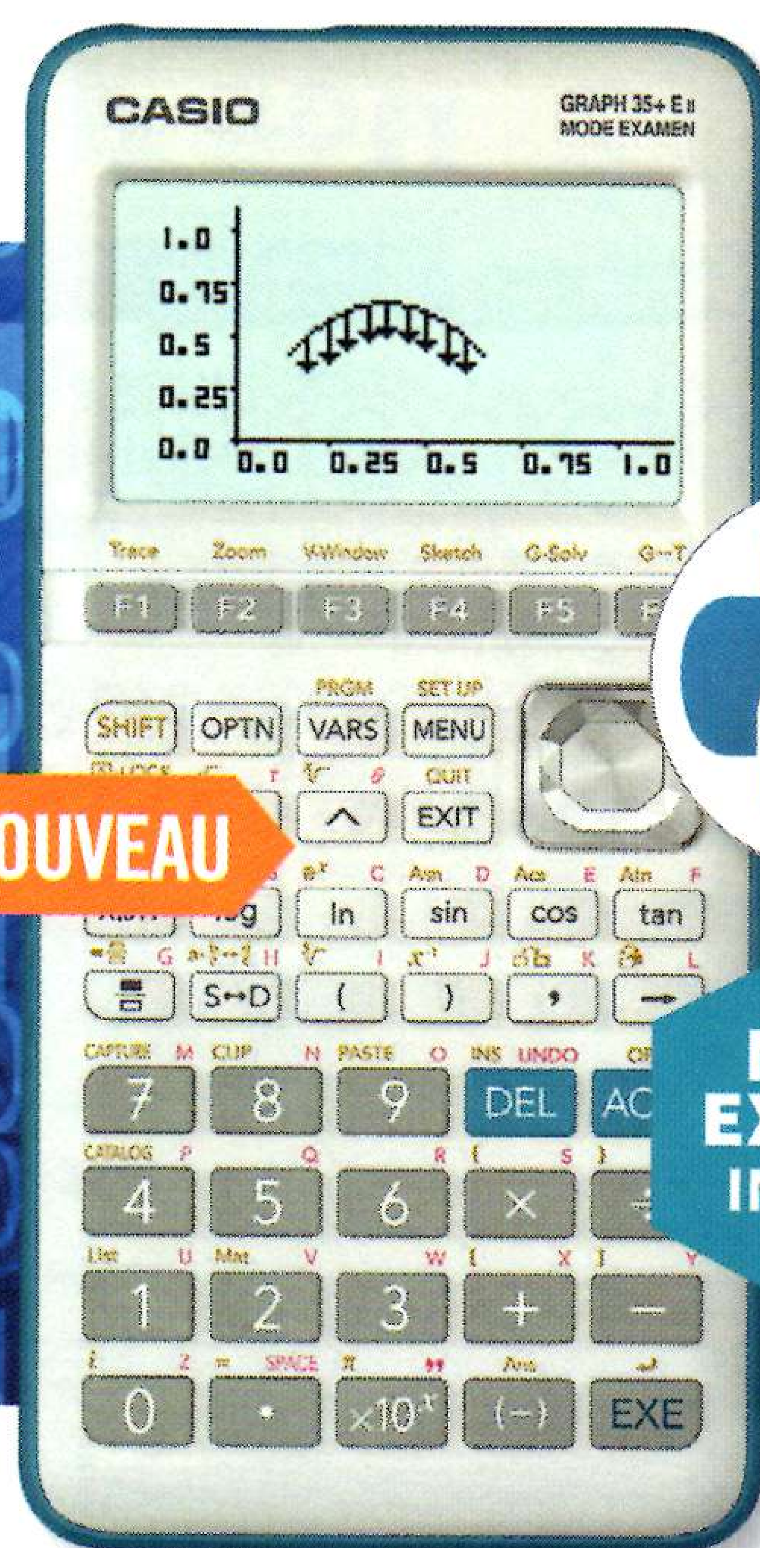
400 problèmes du Monde et leurs solutions

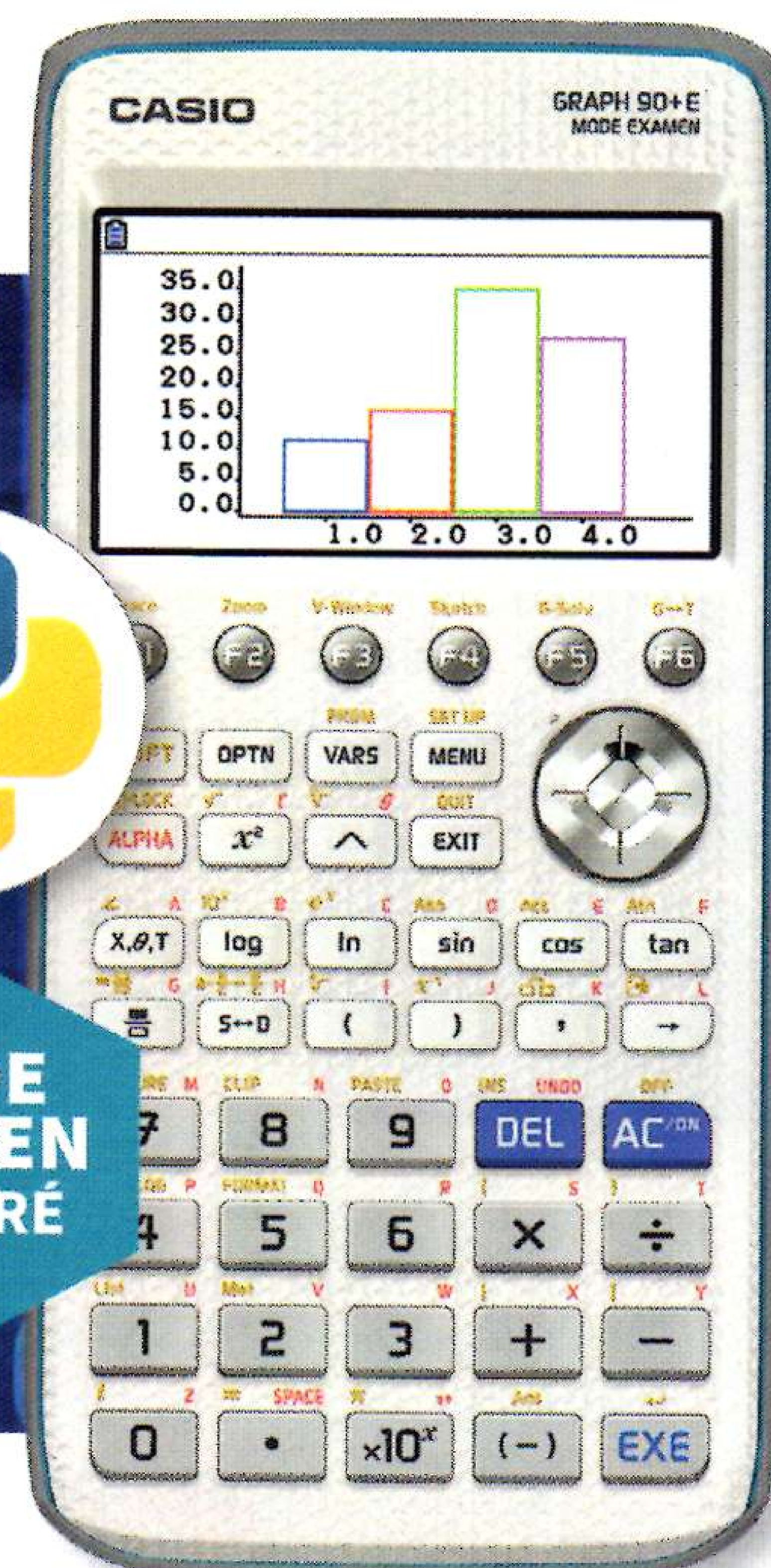
www.infinimath.com/librairie

CASIO®

PROGRAMMEZ **VOTRE RENTRÉE !**







FX-92+ SPÉCIALE COLLÈGE

- Menu Algorithmique
- Menu Tableur

GRAPH 35+E II — GRAPH 90+ E

- Pour toutes les spécialités du lycée
- Menu de programmation Python
- Mises à jour régulières disponibles sur le site www.casio-education.fr

BÉNÉFICIEZ D'ÉQUIPEMENTS SUPPLÉMENTAIRES POUR VOTRE ÉTABLISSEMENT*

Pour toute recommandation exclusive d'une calculatrice CASIO sur la liste des fournitures scolaires.
(Modalités disponibles sur le site www.casio-education.fr)

VOUS SOUHAITEZ RÉALISER
UN ACHAT GROUPÉ POUR VOTRE ÉTABLISSEMENT
OU METTRE EN PLACE
UNE CAGNOTTE EN LIGNE POUR VOS ÉLÈVES ?
Rendez-vous sur le site www.casio-education.fr
à la rubrique Achats groupés !



GRAPH 25+E, GRAPH 35+E II
GRAPH 90+E, fx-CP400+E

* CASIO se réserve le droit de clôturer ses offres exclusives à tout moment.